Цилиндрически-симметричная задача о распаде специального разрыва при учете силы тяжести

А.С. Кирьянова
askiryanova@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)

Аннотация

В работе рассматриваются двумерные цилиндрически-симметричные изэнтропические течения политропного газа в условиях действия силы тяжести. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики. Для постановки задачи о распаде специального разрыва в системе делается вырожденная замена переменных, а именно: зависимые и независимые переменные меняются ролями. В новых переменных для системы ставится начально-краевая задача с данными на звуковой характеристике и дополнительным условием. Это условие описывает мгновенное разрушение непроницаемой стенки, отделяющей в начальный момент времени газ от вакуума. Доказывается теорема существования и единственности поставленной начально-краевой задачи в окрестности звуковой характеристики. Далее решение строится в виде степенных рядов. Для определения коэффициентов рядов выписываются и интегрируются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ структуры коэффициентов рядов позволил доказать существование построенного решения в области от звуковой характеристики до границы газ-вакуум включительно. Для определения закона движения границы газ-вакуум выписывается квазилинейная система уравнений с частными производными, которая с помощью характеристического параметра сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. После интегрирования последней системы в параметрическом виде получен закон движения границы газ-вакуум и значения параметров газа на ней.

Ключевые слова: политропный газ; вакуум; сила тяжести; система уравнений газовой динамики; граница газ-вакуум; задача о распаде специального разрыва; начально-краевая задача; звуковая характеристика.

Задачи об истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил рассматривались ранее. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [1], [2].

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

1 Постановка задачи

Будут рассматриваться двумерные цилиндрически-симметричные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ - скорость звука газа; u, w - цилиндрические координаты вектора скорости газа; t, r, z - независимые переменные. Здесь: ρ - плотность газа; $\gamma>1$ - показатель политропы газа.

В момент $t = 0$ непроницаемая цилиндрическая стенка Γ с уравнением $r = R$ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что газ находится внутри цилиндра, а вакуум - снаружи и на газ действует сила тяжести (см. Рис. 1). Будет предполагаться, что в начальный моменты времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_\Gamma > 0$, то есть имеет место разрыв плотности газа.

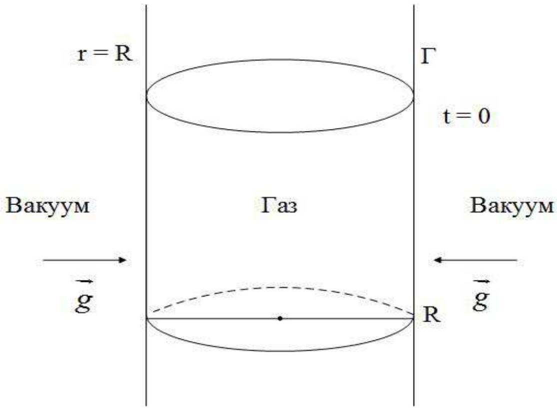

Рис. 1: *Области покоя и вакуума*

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается вдоль стенки $z = 0$ истечение газа в вакуум (см. Рис. 2). В рассматриваемой задаче сохраняется область покоящегося газа. В результате распада разрыва возникает течение, граничащее с областью покоящегося газа и называемое далее волной разрежения. Волна разрежения отделена от области покоящегося газа линией Γ_{12}, являющейся звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_{02}.

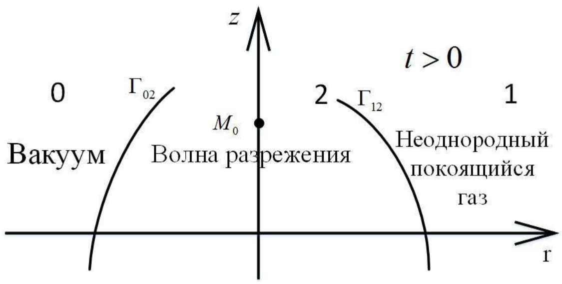

Рис. 2: *Области покоя, вакуума и волны разрежения*

В данной работе будут строиться законы движения: свободной поверхности Γ_{02}, звуковой характеристики Γ_{12} волна разрежения.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа для цилиндрическо-симметричной системы координат в условиях действием силы тяжести, имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} &c_t + c_r u + c_z w + \tfrac{\gamma-1}{2} c\left(u_r + w_z + \tfrac{u}{r}\right) = 0, \\ &u_t + u_r u + u_z w + \tfrac{2}{\gamma-1} c c_r = 0, \\ &w_t + w_r u + w_z w + \tfrac{2}{\gamma-1} c c_z = -g. \end{aligned} \tag{1}$$

где g – ускорение свободного падения.

Если в системе (1) положить $u = w = 0$, то первые два уравнения выполнятся тождественно, а в третьем уравнении получим $\frac{2}{\gamma-1}cc_z = -g$. Интегрируя полученное уравнение, имеем $c = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma-1)gz}$ – распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь c_{00} - скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z \leq \frac{c_{00}^2}{(\gamma-1)g}. \tag{2}$$

Причем на верхней границе при $z = \frac{c_{00}^2}{(\gamma-1)g}$ волна разрежения примыкает к вакууму. В данной работе волны разрежения будет построена для внутренних точек интервала (2). Конфигурация течения в окрестности непроницаемой стенки $z = 0$ и верхней границы газ-вакуум рассматриваться не будут.

Для построения волны, как и ранее [1] при построении решения задачи о распаде разрыва, в системе (1) делается следующая замена переменных: за независимые переменные берутся t, c, z, а за неизвестные функции r, u, w. В результате такой замены вместо системы (1) получается система:

$$\begin{aligned}
&r_t = u - r_z w + \tfrac{\gamma-1}{2}c(u_c + r_c w_z - r_z w_c + r_c \tfrac{u}{r}),\\
&r_c u_t + (u - r_t - r_z w)u_c + r_c u_z w + \tfrac{2}{\gamma-1}c = 0,\\
&r_c w_t + (u - r_t - r_z w)w_c + r_c w_z w - \tfrac{2}{\gamma-1}c r_z = -g r_c.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&r_t = u - r_z w + \tfrac{\gamma-1}{2}c(u_c + r_c w_z - r_z w_c + r_c \tfrac{u}{r}),\\
&r_c u_t - \tfrac{\gamma-1}{2}c(u_c + r_c w_z - r_z w_c + r_c \tfrac{u}{r})u_c + r_c u_z w + \tfrac{2}{\gamma-1}c = 0,\\
&r_c w_t - \tfrac{\gamma-1}{2}c(u_c + r_c w_z - r_z w_c + r_c \tfrac{u}{r})w_c + r_c w_z w - \tfrac{2}{\gamma-1}c r_z = -g r_c.
\end{aligned} \tag{4}$$

Закон движения характеристики Γ_{12} определяется из решения дифференциальной задачи [3]

$$r_t = c_0(z)\sqrt{1 + r_z^2}, \qquad r(0) = R.$$

Задача по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение, что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12}:

$$u|_{\Gamma_{12}} = 0, \qquad w|_{\Gamma_{12}} = 0, \qquad c|_{\Gamma_{12}} = c_0(z). \tag{5}$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (3) с данными на характеристике Γ_{12} (5). Поскольку Γ_{12} - характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [4]. Если бы поверхность Γ_{12} убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Поскольку стенка $r = R$ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных t, c, z служит [1] соотношение

$$r(0, c, z) = R \tag{6}$$

2 Потроение волны разрежения

Теорема 1 *Существует t_0 такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности Γ_{12} существует единственное локально-аналитическое решение задачи (4)-(6) о распаде специального разрыва.*

Доказательство теоремы состоит, как и в [1] в сведении, к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [4].

Разложим решение задачи (4)-(6) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(c, z)\frac{t^k}{k!}\ , \quad \mathbf{f} = \{r, u, w\}, \tag{7}$$

В системе (4) положим t=0 и с учетом (6), получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (7)

$$r_1 = u_0 + \tfrac{\gamma-1}{2} c u_{0c},$$

$$\tfrac{\gamma-1}{2} u_{0c}^2 = \tfrac{2}{\gamma-1},$$

$$u_{0c} w_{0c} = 0.$$

Преобразуя уравнения, получаем

$$w_{0c} = 0, \qquad u_{0c} = \pm\frac{2}{\gamma-1}.$$

Из физической постановки задачи в последней формуле выбираем знак минус.

Интегрируя с учетом (5), имеем

$$r_1 = -2\alpha c + \frac{2}{\gamma-1} c_0(z), \quad u_0 = -\frac{2}{\gamma-1}(c - c_0(z)), \quad w_0 = 0.$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.

Систему (4) продифференцируем по t, положим $t = 0$ с учетом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$r_2 = u_1 + \tfrac{\gamma-1}{2} c \left(u_{1c} + r_{1c} \tfrac{u_0}{R} \right),$$

$$c u_{1c} - \alpha u_1 = \tfrac{-\alpha c}{R} u_0,$$

$$c w_{1c} - 2\alpha w_1 = 2\alpha g + \tfrac{4 c_{0z}(z)}{(\gamma-1)^2} c.$$

Выпишем решение системы в квадратурах

$$u_1 = c^{\alpha} (u_{10}(z) + \textstyle\int \tfrac{\gamma+1}{R(\gamma-1)^2} (c - c_0(z)) c^{-\alpha} dc)$$

$$w_1 = c^{2\alpha} (w_{10}(z) + \textstyle\int (2\alpha g + \tfrac{4 c_{0z}(z)}{(\gamma-1)^2} c) c^{-2\alpha-1} dc).$$

Интегрируя систему с учетом (5), имеем

При $\alpha \neq 1,\ \alpha \neq 2$

$$u_1 = \tfrac{4}{R} \tfrac{\gamma+1}{(\gamma-3)(3\gamma-5)} c_0^{2-\alpha}(z) c^{\alpha} + \tfrac{4\alpha}{R} c(\tfrac{1}{3\gamma-5} c - \tfrac{1}{\gamma-3} c_0(z))$$

$$w_1 = \left(\tfrac{2 c_0(z) c_{0z}(z)}{(\gamma-1)} + g \right) c_0^{-2\alpha}(z) c^{2\alpha} - \tfrac{2 c_{0z}(z)}{(\gamma-1)} c - g.$$

При $\alpha = 2$ $(\gamma = \frac{5}{3})$

$$u_1 = -\tfrac{12}{R} (c_0(z) \ln c_0(z) + c_0(z)) c_0^{-2}(z) c^2 + \tfrac{12}{R} c(c \ln c + c_0(z))$$

$$w_1 = (3 c_0(z) c_{0z}(z) + g)\, c_0^{-4}(z) c^4 - 3 c_{0z}(z) c - g.$$

При $\alpha = 1$ $(\gamma = 3)$

$$u_1 = -\tfrac{2}{R} (c_0(z) \ln c_0(z) - 1) c + \tfrac{2}{R} (c - c_0(z) c \ln c)$$

$$w_1 = (c_0(z) c_{0z}(z) + g)\, c_0^{-2}(z) c^2 - c_{0z}(z) c - g.$$

Систему (4) продифференцируем k раз по t, положим $t = 0$ с учетом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$r_{k+1} = u_k + \tfrac{\gamma-1}{2} c u_{kc} + F_{1k}(c, z),$$

$$c u_{kc} - \alpha k u_2 = F_{2k}(c, z),$$

$$c w_{kc} - 2\alpha k w_k = F_{3k}(c, z).$$

Здесь $F_{1k}(c,z), \quad F_{2k}(c,z), \quad F_{1k}(c,z)$ - функции известным образом, зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (7).

Интегрируя систему, имеем

$$u_k(c,z) = c^{\alpha k}(u_{0k}(z) + \int F_{2k}(c,z)c^{-\alpha k-1}dc),$$

$$w_k(c,z) = c^{2\alpha k}(w_{0k}(z) + \int F_{3k}(c,z)c^{-2\alpha k-1}dc).$$

Анализ структуры коэффициентов ряда (7) приводит к следующим

Лемма 1. *Коэффициенты ряда (2.1) при* $k \geq 1$ *имеют следующую структуру:* $\mathbf{f}_k(c,z) = \mathbf{f}_k^0(z) + c\mathbf{P}_k(c, clnc, c^{\alpha})$, *где* P_k *есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем* Ak $(A = const)$. *Коэффициенты многочленов - функции, зависящие от* z.

Лемма доказывается индукцией по k. База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (7). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для $\mathbf{f}_k$ обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и $\mathbf{f}_k$ обладают нужной структурой.

На основании леммы 1 можно утверждать, что структура решения задачи (4)-(6) следующая

$$r = r^0(t,z) + cr^1(t,c,z),$$

$$u = u^0(t,z) + cu^1(t,c,z),$$

$$w = w^0(t,z) + cw^1(t,c,z),$$

где

$$r^0(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k^0(z)\tfrac{t^k}{k!},$$

$$u^0(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z)\tfrac{t^k}{k!}, \tag{8}$$

$$w^0(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z)\tfrac{t^k}{k!}.$$

Для $r^0(t,z), \ u^0(t,z), \ w^0(t,z)$ справедлива следующая

Лемма 2. *Ряды (8) являются решением следующей задачи*

$$r_t + r_z w = u, \qquad r(0,z) = R$$

$$u_t + r_z w = 0, \qquad u(0,z) = \tfrac{2}{\gamma-1}c_0(z) \tag{9}$$

$$w_t + r_z w = -g, \qquad w(0,z) = 0$$

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (9) и сравнением полученных рядов с рядами (8). Ряды оказываются равными. Система (9) не имеет особенностей, поэтому задача (9) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами. Следовательно, ряды (8) сходятся. На основании приведенных лемм доказывается следующая

Теорема 2. *Для* $1 < \gamma < 3$, *при* $0 \leq t \leq t_*$ *область сходимости рядов (7), а также рядов* $\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_z, \mathbf{f}_c$ *покрывает всю зону течения от* Γ_{12} *до* Γ_{02} *включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (9).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1] и проводится по методике [4], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используется теорема 1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда.

Проведем исследование задачи (9). С помощью введения характеристического параметра данная система уравнений с частными производными сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [5].

$$\begin{aligned} &\tfrac{dt}{d\tau} = 1, \quad \tfrac{dr}{d\tau} = u, \quad \tfrac{dz}{d\tau} = w, \\ &\tfrac{du}{d\tau} = 0, \quad \tfrac{dw}{d\tau} = -g. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрируя систему (10), имеем $t = \tau$,

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad r = R + \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z) t,$$
$$w = -gt, \quad z = z_{00} - \frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

Благодарности

В заключение автор благодарит С.Л. Дерябина, С.П. Баутина и С.С. Титова за полезное обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] S.P. Bautin, S.L. Derjabin. *Matematicheskoe modelirovanie istechenija ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical Modelling of Ideal Gas Outflow into Vacuum]. Novosibirsk, Nauka, 2005. (in Russian) = С. П. Баутин, С. Л. Дерябин. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум.* Новосибирск, Наука, 2005.

[2] S.P. Bautin, S.L. Derjabin, A.V. Mezencev , N.P. Chuev. *Nachal'no-kraevye zadachi dlja modelirovanija dvizhenija sploshnoj sredy s osobennostjami na svobodnoj granice* [Initial boundary-value problems for modeling the motion of a continuous medium with singularities on a free boundary]. Novosibirsk, Nauka, 2015. (in Russian) = С. П. Баутин, С. Л. Дерябин, А. В.Мезенцев, Н. П. Чуев. *Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе.* Новосибирск, Наука, 2015.

[3] L.V. Ovsyannikov. *Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki.* [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Izhevsk, Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003. (in Russian) = Л. В. Овсянников. *Лекции по основам газовой динамики.* Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2003.

[4] S.P. Bautin. *Harakteristicheskaja zadacha Koshi i ee prilozhenija v gazovoj dinamike* [Characteristic Cauchy Problem and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 2009. (in Russian) = С. П. Баутин *Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике.* Новосибирск, Наука, 2009.

[5] R. Kurant. *Partial differential equations.* N.Y. — London, 1962.

Cylindrically symmetric problem of the decay of a special discontinuity with the force of gravity

Anna S. Kiryanova
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. The paper examines two-dimensional cylindrically symmetric isentropic flow of a polytropic gas under the action of gravity. As a mathematical model uses a system of equations of gas dynamics. To put the problem of decay of a special break in the system becomes degenerate change of variables, namely: dependent and independent variables change roles. In the new variables for the system is put initial-boundary value problem with data on the characteristics of the sound and the additional condition. This condition describes the instantaneous destruction of the impermeable wall separating the initial time the gas from the vacuum. We prove the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem in the vicinity of the sound characteristics. Next, the solution is constructed in the form of a power series. To determine the coefficients of the series are written and integrated system of ordinary differential equations. Coefficients of the series structure analysis has proved the existence of solutions built on the sound characteristics to the boundary of the gas-vacuum inclusive. To determine the law of motion of gas-vacuum boundary issued quasi-linear system of partial differential equations, which by means of a characteristic parameter is reduced to a system of ordinary differential equations. After integration of the latter system in parametric form obtained law of motion of gas-vacuum boundary values and parameters of the gas on it.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary,initial-boundary value problem, Riemann problem.