Об устойчивости деформирования одной части фермы с элементами из разупрочняющегося материала

В.В. Стружанов[1] stru@imach.uran.ru

А.В. Коркин[2] alexkorkin@list.ru

1 – Институт машиностроения УрО РАН (Екатеринбург)
2 – Уральский федеральный университет (Екатеринбург)

Аннотация

Исследована устойчивость процесса растяжения некоторых стержневых систем, представляющих собой элементы одной части фермы. Часть стержней выполнена из разупрочняющегося материала. Показана идеология применения методов математической теории катастроф к задачам устойчивости механических систем с разупрочняющимися элементами. Установлено, что начиная с некоторого момента у стержневой системы появляется несколько положений равновесия как устойчивых, так и неустойчивых. Определен момент потери устойчивости (катастрофы), когда система скачком переходит в новое устойчивое состояние.

Ключевые слова: стержневая система; устойчивость; равновесие; катастрофа сборки; лагранжиан; матрица Гессе.

Введение

Процесс деформирования материала в результате повреждения его микропорами и микротрещинами может привести (и, как правило, приводит) к зависимости между напряжениями и деформациями, соответствующей разупрочнению, при котором напряжения падают, а деформации, называемые закритическими, или запредельными, растут. С континуальной (феноменологической) точки зрения, этот эффект характеризуется падающей ветвью диаграммы деформирования. Материал с такой диаграммой является реологически неустойчивым. До недавнего времени понятие реологической неустойчивости использовалось лишь для отбраковки реологических моделей. Однако многие реальные материалы, такие как горные породы, сыпучие тела и даже материалы, адекватно описываются именно моделями реологически неустойчивых материалов. Изучение свойств разупрочняющихся упругопластических материалов необходимо для понимания и феноменологического описания механизма зарождения разрывных нарушений сплошности.

Модель реологической неустойчивости материала вступает в противоречие с некоторыми существующими воззрениями. Прежде всего, возникает вопрос о правомерности отхода от требований реологической устойчивости. Однако вместо требования реологической устойчивости можно использовать принцип устойчивости для тела в целом: состояние материала является реализуемым, если в этом состоянии он находится в составе устойчивой механической системы.

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

Осуществимость реологически неустойчивых состояний существенно связана с неоднородностью тел и не имеет одномерных аналогов. Возражения, которые возникают в связи с отказом от требований реологической устойчивости, являются результатом перенесения на неодномерные тела выводов, полученных для одномерных моделей сплошных сред.

Из приведенных рассуждений следует, что при определенных условиях запредельные деформации могут сохранять устойчивость и подрастать равновесно. Поэтому учет в расчетах на прочность и живучесть возможности работы материала на заключительной стадии деформации (стадии разупрочнения) должен обеспечивать более тонкое определение несущей способности, позволить оценить кинетику повреждения и разрушения конструктивных элементов. Внедрение методик расчетов, учитывающих стадию разупрочнения материала, в практику проектирования приведет к более полному использованию ресурса материала, повышению надежности, к снижению материалоемкости изделий, что позволит выйти на новый уровень нормирования прочности и ресурса.

Закритическое состояние (разупрочнения) неоднократно фиксировалось как в экспериментах [1–5] так и при исследовании различных моделей [6–9]. Классические методы расчета на прочность не учитывают возможность работы элементов конструкций на закритической стадии. Поэтому не возникает проблем, связанных с устойчивостью системы (за исключением случаев потери устойчивости при сжатии). Но при введении в рассмотрение разупрочняющихся элементов, входящих в механическую систему, устойчивость процесса деформирования приобретает особое значение, т.к. разрушение конструкций различных сооружений в общем случае представляет собой глобальное явление того же характера, как явление невозможности равновесия [10].

Исследование влияния разупрочнения на устойчивость процесса деформирования механических систем естественно начать с изучения простейших случаев. Тем самым простые механические системы становятся модельными примерами для общей теории, которые помогают установить связь между теорией и практикой и отточить физическую интуицию.

В данной работе проведено исследование устойчивости процесса растяжения некоторых фермерных элементов конструкций, отдельные части которых представляют стержни из разупрочняющегося материала. Показано влияние учета падающих ветвей диаграмм деформирования стержней, которые характеризуют их разупрочнение, на устойчивость процесса. Установлено, что начиная с некоторого момента, система имеет несколько возможных положений равновесия. Определен момент потери устойчивости, когда система скачком переходит из одного положения равновесия в другое. Изучение устойчивости основано на существенном использовании аппарата теории катастроф (или теории особенностей дифференцируемых отображений) – области математики на стыке классического анализа и дифференциальной геометрии [11–17].

1 Элемент статически неопределимой плоской фермы

Рассмотрим элемент ферменной конструкции в виде стержневой системы, изображенной на рис.1. Сначала полагаем, что стержни AB, AD, AK сохраняют упругие свойства во все время нагружения и изготовлены из одного материала. Не нарушая общности рассуждений считаем их длины равными l, а площадь поперечного сечения единичной. Тогда податливость стержней равна l/E [18], где E – модуль Юнга материала.

Свойства же стержня AC при растяжении определяет полная диаграмма $q \sim v$ (рис.2). Здесь q – растягивающее усилие, v – удлинение стержня, равная перемещению узла A. Таким образом, стержень AK при растяжении проходит все стадии деформирования, включаю и разупрочнение.

Будем различать два типа нагружения, а именно, жесткое, когда узлу K задается перемещение U, и мягкое, когда к узлу K приложена растягивающая сила p (рис.1). В первом случае U – параметр управления, а v – параметр состояния (обобщенная координата системы). Во втором случае p – параметр управления, а величины U и v – параметры состояния (обобщенные координаты).

Исследуем устойчивость системы при жестком нагружении. В этом случае лагранжиан (функция Лагранжа), описывающий поведение данной консервативной системы при квазистатическом нагружении и постоянной температуре, есть потенциальная энергия системы

$$W^U = \int\limits_0^v q(v)\, dv + \frac{E}{l}(v\cos\alpha)^2 + \frac{E}{2l}(U - v)^2.$$

Здесь первое слагаемое – энергия деформаций стержня AC, второе слагаемое – энергия стержней AB и

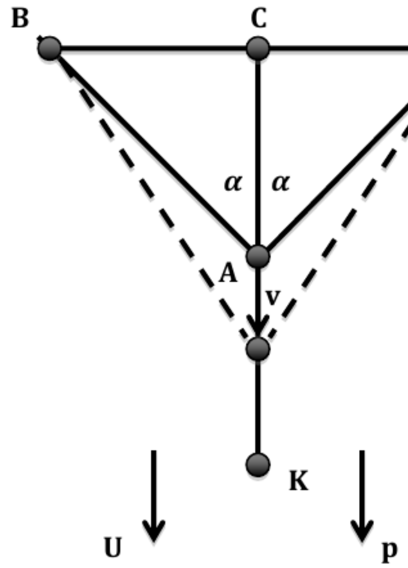

Рис. 1: Плоская статически неопределимая ферма

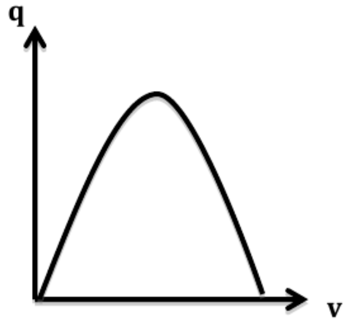

Рис. 2: Полная диаграмма растяжения стержня AC

AD ($v\cos\alpha$ – их удлинение), третье слагаемое – энергия деформаций стержня AK. Из уравнения Лагранжа второго рода [19] уравнение равновесия системы имеет вид

$$W^U_{,v} = q(v) + \frac{2E}{l} v \cos^2\alpha - \frac{E}{l}(U - v) = 0. \tag{1}$$

Здесь запятой обозначена частная производная функции по соответствующему аргументу. Решения уравнения (1) – это критические точки (точки экстремума) функции W^U.

Для определения типа равновесия в критических точках необходимо найти $W^U_{,vv}$. Если в критической точке $W^U_{,vv} \neq 0$, то из теоремы о неявной функции [15, 20] следует, что данная точка является изолированной (невырожденной) и в любой ее окрестности уравнение (1) определяет параметр состояния v как однозначную функцию параметра U. При $W^U_{,vv} > 0$ функция W^U выпукла вниз и положение равновесия устойчиво. Когда $W^U_{,vv} < 0$ - равновесие неустойчиво (функция W^U выпукла вверх).

Пусть в какой-нибудь критической точке

$$W^U_{,vv} = q_{,v} + \frac{2E}{l}\cos^2\alpha + \frac{E}{l} = 0. \tag{2}$$

Тогда в любой ее окрестности однозначное представление параметра v через параметр U невозможно. Следовательно, для заданного U существует несколько значений v , удовлетворяющих уравнению (1).

Совместные решения уравнений (1) и (2) определяют, так называемые, вырожденные критические точки. Известно [13, 15], что невырожденные критические точки структурно устойчивы. При их возмущении характер равновесия сохраняется. Природа критических точек изменяется лишь при переходе через вырожденные критические точки. В этом случае происходит смена типа равновесия. Возмущение вырожденной критической точки приводит к появлению невырожденной критической точки, в которую система переходит скачкообразно. Устойчивость деформирования системы нарушается. Отсюда следует, что равновесный характер нагружения системы сохраняется при условии

$$q_{,v} > -\frac{2E}{l}\cos^2\alpha - \frac{E}{l}. \tag{3}$$

При мягком нагружении лагранжиан системы равен

$$W^p = W^U - \int\limits_0^U p\,dU$$

где последнее слагаемое есть работа внешней силы, взятая со знаком минус. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{gathered} W^p_{,v} = q(v) + \tfrac{2E}{l}v\cos^2\alpha - \tfrac{E}{l}(U-v) = 0, \\ W^p_{,U} = \tfrac{E}{l}(U-v) - p = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Точки перехода в неустойчивое состояние (вырожденные критические точки) сейчас определяются совместными решениями уравнений (4) и уравнения, получающегося приравниванием к нулю определителя матрицы Гессе функции W^p:

$$|H(W^p)| = \begin{vmatrix} W^p_{,vv} & W^p_{,vU} \\ W^p_{,Uv} & W^p_{,UU} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{,v} + \frac{2E}{l}\cos^2\alpha + \frac{E}{l} & q_{,v} + \frac{2E}{l}\cos^2\alpha - \frac{E}{l} \\ -\frac{E}{l} & \frac{E}{l} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Отметим, что когда матрица $H(W^p)$ положительно определена, то функция W^p в данной критической точке имеет локальный минимум (функция выпукла вниз) и система устойчива. Если матрица $H(W^p)$ отрицательно определена, функция W^p выпукла вверх [21] – система абсолютно неустойчива. Когда матрица $H(W^p)$ знаконеопределена, то критическая точка является седловой точкой функции W^p. Исключительно в первом случае положение равновесия устойчиво. Критические точки функции W^p (решения уравнений (4)) будут изолированными (структурно устойчивыми) и в окрестности каждой их них уравнения (4) определяют параметры $(v,\ U)$ как однозначные функции от параметра p. Совместное решение уравнений (4), (5) определяет вырожденные критические точки функции W^p. В любой окрестности этих точек однозначное представление переменных $(v,\ U)$ через параметр p уже невозможно и существует несколько значений $(v,\ U)$ для фиксированного p, удовлетворяющих уравнениям (4). Равенство $|H(W^p)| = 0$ означает переход от устойчивости к неустойчивости. В этот момент появляется невырожденная критическая точка, отвечающая устойчивому равновесию, куда система переходит скачкообразно. Раскрывая определитель (5), находим, что устойчивость растяжения сохраняется при условии выполнения неравенства

$$q_{,v} > -\frac{2E}{l}\cos^2\alpha. \tag{6}$$

Отметим, что на падающей ветви диаграммы $q(v)$ производная $q_{,v} < 0$ и конечна. Поэтому условиям (3) и (6) можно удовлетворить, если жесткость упругих стержней E/l взять достаточно большой. В этом случае потери устойчивости деформирования не происходит. Следовательно, в статически неопределимой стержневой системе возможен случай, когда один из ее элементов при устойчивом характере деформирования всей системы может работать на падающей ветви диаграммы растяжения, когда его удлинение растет, а растягивающее усилие падает.

2 Плоская ферма с тремя разупрочняющимися стержнями

Пусть наряду со стержнем AC и стержни $AB,\ AD$ выполнены из одного и того же разупрочняющегося материала. Их диаграммы растяжения $t(e)$ одинаковы и обладают падающей ветвью, аналогичной изображенной на рис.2. Здесь $e = v\cos\alpha$ – удлинение стержней.

Лагранжиан при жестком нагружении имеет вид

$$V^U = \int\limits_0^v q(v)\,dv + 2\int\limits_0^e t(e)\,de + \frac{E}{2l}(U-v)^2.$$

Тогда уравнение равновесия есть равенство

$$V,_v^U = q(v) + 2t(e)\cos\alpha - \frac{E}{l}(U-v) = 0. \tag{7}$$

Решения уравнения (7) (критические точки функции V^U) образует, так называемое, многообразие катастрофы, которое в данном случае представляет поверхность со сборками. Классическим примером является катастрофа сборки Уитни [13], возникающая при отсутствии в системе стержней AB и AD (рис.3). Вырожденные критические точки, где происходит смена типа равновесия, определяется совместным решением уравнения (7) и уравнения

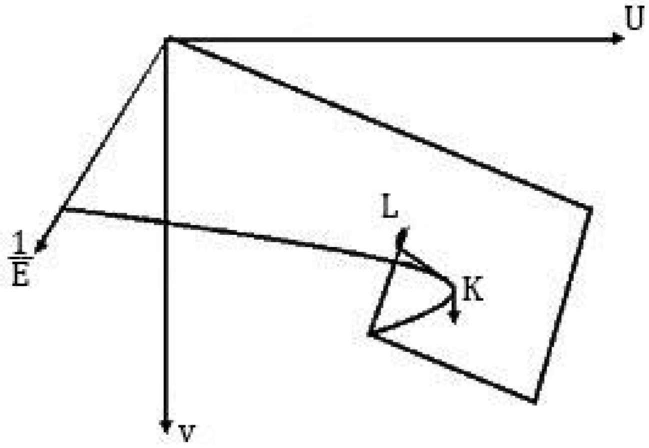

Рис. 3: Катастрофа сборки

$$V,_{vv}^U = q,_v + 2t,_e \cos^2\alpha + \frac{E}{l} = 0. \tag{8}$$

Эти решения образуют линии сборок. Для целей данного анализа необходимо знать только первую линию сборки L_1 (рис.3).

При медленном нагружении система переходит от одного устойчивого равновесия к другому ($V,_{vv}^U >$ 0) до тех пор, пока критическая точка не пересечет линию сборки L_1 (например, в точке K (рис.3)). Система теряет устойчивость и скачкообразно переходит в новое устойчивое равновесие (рис.3), происходит катастрофа, в результате которой ферма разрушается.

Отметим, что при достаточно большой величине E уравнение (8) может не иметь решения. Тогда путь по многообразию катастрофы не пересекает линию L_1 и процесс продолжается равновесно, до полного исчерпания несущей способности разупрочняющихся стержней.

При мягком нагружении лагранжиан принимает вид

$$V^p = V^U - \int\limits_0^U p\,dU.$$

Уравнения равновесия образуют систему

$$\begin{aligned} &q(v) + 2t(e)\cos\alpha - \tfrac{E}{l}(U-v) = 0, \\ &\tfrac{E}{l}(U-v) - p = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Точки перехода в неустойчивое состояние определяются совместным решением системы (9) и уравнения, получающегося приравниванием к нулю детерминанта матрицы Гессе:

$$|H(V^p)| = q_{,v} + 2t_{,e}\cos^2\alpha = 0. \tag{10}$$

Устойчивый характер нагружения сохраняется, пока $|H(V^p)| > 0$. После первого же выполнения равенства (10) детерминант $|H(V^p)|$ становится меньше нуля при любых параметрах управления и состояния. Следовательно, устойчивое равновесия становится невозможным, и стержневая система разрушается.

Список литературы

[1] V. E. Vildeman, N. G. Chausov. Conditions of deformation softening of a material during stretching of a prototype of a special design. *Zavodskaya laboratory. Diagnostics of materials*, 73(10):55–59, 2007. (in Russian) = В. Э. Вильдеман,Н. Г. Чаусов. Условия деформационного разупрочнения материала при растяжении опытного образца специальной конструкции. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 73(10):55–59, 2007.

[2] N. G. Chausov. The complete diagram of deformation as a source of information on the kinetics of damage accumulation and crack resistance of materials . *Zavodskaya laboratory. Diagnosis of materials*, 70(7):42–49, 2004. (in Russian) = Н. Г. Чаусов. Полная диаграмма деформирования как источник информации о кинетике накопления повреждений и трещиностойкости материалов. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 70(7):42–49, 2004.

[3] A. A. Lebedev, N. G. Chausov, Yu. L. Yevetskiy. A technique for constructing complete diagrams of deformation of sheet materials. *Problems of Strength*, (9):29–32, 1986. (in Russian) = А. А. Лебедев, Н. Г. Чаусов, Ю. Л. Евецкий. Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов. *Проблемы прочности*, (9):29–32, 1986.

[4] V. E. Vildeman, M. P. Tretyakov. Testing of materials with the construction of complete deformation diagrams . *Problems of machine building and machine reliability*, (2):93–98, 2013. (in Russian) = В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков. Испытание материалов с построением полных диаграмм деформирования. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, (2):93–98, 2013.

[5] V. E. Vildeman (Ed.). *Experimental Investigations of the Properties of Materials in Complex Thermomechanical Effects.* Moscow, FIZMATLIT, 2012. (in Russian) = В. Э. Вильдеман (Ред.). *Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях.* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2012.

[6] E. A. Andreeva. Solution of one-dimensional plasticity problems for a softening material *Vestnik of the Samara State Technical University*, 2(17):152–160, 2008. (in Russian) = Е. А. Андреева. Решение одномерных задач пластичности для разупрочняющегося материала. *Вестн. Сам. ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки*, 2(17):152–160, 2008.

[7] V. V. Struzhanov, V. V. Bashurov Modification model of the Mazing . *Vestnik of the Samara State Technical University*, 1(14):29–39, 2007. (in Russian) = В. В. Стружанов, В. В. Башуров. Модификационная модель Мазинга. *Вестн. Сам. ГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки*, 1(14):29–39, 2007.

[8] V. V. Struzhanov, V. I. Mironov. *Deformation softening of the material in structural elements.* Ekaterinburg, Izd-vo UB RAS, 1995. (in Russian) = В. В. Стружанов, В. И. Миронов. *Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций.* Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995.

[9] V. E. Vildeman, Yu. V. Sokolkin, A. A. Tashkinov. *Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials.* Moscow, FIZMATLIT, 1997. (in Russian) = В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов.* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 1997.

[10] L. I. Sedov. *Continuum mechanics. – Vol.1.* Moscow, Nauka, 1970. (in Russian) = Л. И. Седов. *Механика сплошной среды. – Т.1.* Москва, Наука, 1970.

[11] V. A. Ostreikovsky, S. P. Saakyan, Ya. V. Silin. Forecasting the technogenic risk of dynamic systems using the theory of catastrophes. *Fundamental Research*, (3):399–402, 2012. (in Russian) = В. А. Острейковский, С. П. Саакян, Я. В. Силин. Прогнозирование техногенного риска динамических систем методами теории катастроф. *Фундаментальные исследования*, №3: С.399–402, 2012.

[12] V. A. Ostrejkovsky. *Analysis of the stability and controllability of dynamical systems using the theory of catastrophes.* Moscow, Higher School, 2005. (in Russian) = В. А. Острейковский. *Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф.* Москва, Высшая школа, 2005.

[13] T. Poston, I. Stuart. *The theory of catastrophes and its applications.* Moscow, Mir, Nauka, 1982. (in Russian) = Т. Постон , И. Стюарт *Теория катастроф и ее приложения.* Москва, Мир, Наука, 1982.

[14] V. I. Arnold, A. N. Varchenko, S. M. Huseyn-Zade. *Singularities of differentiable mappings – Vol.1.* Moscow, Nauka, 1982. (in Russian) = В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. *Особенности дифференцируемых отображений – Т.1.* М.: Наука, 1982.

[15] R. Gilmour. *Applied theory of catastrophes – Vol. 1.* Moscow, Mir, 1974. (in Russian) = Р. Гилмор. *Прикладная теория катастроф – Кн. 1.* Москва, Мир, 1974.

[16] V. I. Arnold. *Theory of catastrophes.* Moscow, Nauka, 1990. (in Russian) = В. И. Арнольд. *Теория катастроф.* Москва, Наука, 1990.

[17] J. M. T. Thompson. *Instability and catastrophe in science and technology.* Moscow, Mir, 1985. (in Russian) = Дж. М. Т. Томпсон. *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.* Москва, Мир, 1985.

[18] S. P. Timoshenko, J. Gueret. *Mechanics of Materials.* Moscow, Mir, 1976. (in Russian) = С. П. Тимошенко, Дж. Гере. *Механика материалов.* Москва, Мир, 1976.

[19] L. Pars. *Analytic Dynamics.* Moscow, Nauka, 1971. (in Russian) = Л. Парс. *Аналитическая динамика.* Москва, Наука, 1971.

[20] J. Bruce, P. Giblin. *Curves and features.* Moscow, Mir, 1988. (in Russian) = Дж. Брус, П. Джиблин. *Кривые и особенности.* Москва, Мир, 1988.

[21] R. Horn, C. Johnson. *Matrix analysis.* Moscow, Mir, 1989. (in Russian) = Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ.* Москва, Мир, 1989.

The stability of the deformation of one of the farm with the softening of the material elements

Valerii V. Struzhanov
Institute of Engineering Science, The Ural Branch of Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg, Russia)

Alexander V. Korkin
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. The stability of the stretching process some rod systems, which are the elements of one of the farm. Some rods made of a material softening. It is shown that the ideology of the application of methods of mathematical catastrophe theory to problems of stability of mechanical systems with softening elements. It was found that after a certain time in the core of the system appears several equilibrium positions both stable and unstable. Determine the moment of loss of stability (crash) when the system abruptly goes into a new stable state.

Keywords: rod system, stability, balance, build disaster, Lagrangian, Hessian.