О задаче понижения порядка линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами

К.Л. Геут
geutkrl@yandex.ru

С.С. Титов
stitov@usaaa.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (Екатеринбург)

Аннотация

В работе рассматриваются соотношения, задающие нелинейные рекурсии первого порядка для общего линейного рекуррентного соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами. Получены условия существования таких соотношений. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейное рекуррентное соотношение; нелинейное рекуррентное соотношение; числа Фибоначчи; уравнения в конечных разностях.

В работе [1] поставлена общая задача понижения порядка линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которой показано на примере чисел Фибоначчи. В [2] рассматривались также некоторые случаи понижения порядка конечно-разностных уравнений и наличия зависимостей, связанных с остатком номера члена рекуррентной последовательности по некоторому модулю.

В общем виде эта задача ставится [2, 3] для однородного уравнения N-ого порядка

$$f_{n+N} + a_{N-1}f_{n+N-1} + \ldots + a_0 f_n = 0. \tag{1}$$

относительно неизвестной последовательности f_n с известными постоянными коэффициентами $a_0, \ldots, a_{N-1}$ как задача нахождения такой зависимости F, возможно нелинейной, что для любого решения f существует такая постоянная $C = \mathrm{Const}$, что выполняется тождество

$$F(f_n, \ldots, f_{n+N-1}) = C. \tag{2}$$

для любого целого неотрицательного n [2, 3]. Эта задача аналогична проблеме поиска промежуточного интеграла для дифференциального уравнения второго порядка [4].

Пусть

$$F(f_n, \ldots, f_{n+N-1}) = a_m {f_{n+1}}^m + a_{m-1} f_{n+1}^{m-1} {f_n}^1 + a_{m-2} f_{n+1}^{m-2} {f_n}^2 + \ldots + a_1 f_{n+1}^1 f_n^{m-1} + a_0 f_n^m = C. \tag{3}$$

При $N = 2$ при помощи корней $\lambda_1 \neq \lambda_2$ характеристического уравнения (1) находим последовательно

$$\begin{cases} f_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = u + v, \\ f_{n+1} = C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1} = \lambda_1 u + \lambda_2 v, \end{cases} \tag{4}$$

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

где $C_1, C_2 = Const$ и введены обозначения

$$\left\{ \begin{array}{l} u = C_1 \lambda_1^n, \\ v = C_2 \lambda_2^n. \end{array} \right. \tag{5}$$

Подставляя (4), (5) в (3) вычислим

$$a_k f_{n+1}^k f_n^{m-k} = a_k \sum_{j=0}^{k} \cdot \sum_{l=0}^{m-k} C^l{}_{m-k} u^l v^{m-k-l} = a_k \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{m-k} C_k^j \lambda_1^j \lambda_2^k - j u^{l+j} v^{k-j+m-k-l} =$$

$$= a_k \sum_{s=0}^{m} u^s v^{m-s} \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{m-k}^{s-j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = a_k \sum_{s=0}^{m} u^s v^{m-s} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m-k \\ s-j \end{array} \right) {\lambda_1}^j {\lambda_2}^{k-j}; \tag{6}$$

следовательно, (2) получаем в виде

$$\sum_{s=0}^{m} u^s v^{m-s} \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m-k \\ s-j \end{array} \right) \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = C = Const. \tag{7}$$

Итак, в случае полиномиального соотношения (2), (3) при $degF = m$ в однородном случае находим $F(f_n, f_{n+1}) = \sum\limits_{s=0}^{m} u^s v^{m-s} A_s$, где постоянные коэффициенты A равны

$$A_s = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m-k \\ s-j \end{array} \right) \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}. \tag{8}$$

(считаем биномиальные коэффициенты $\left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) = 0$ при $q < 0$ или $q < p$).

При $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$F(f_n, \ldots, f_{n+1}) = \sum_{s=0}^{m} (C_1 \lambda_1^n)^s (C_2 \lambda_2^n)^{m-s} A_s = \sum_{s=0}^{m} (C_1^s C_2^{m-s} A_s) \lambda_1^{ns} \lambda_2^{n(m-s)} = C = Const \tag{9}$$

Если $C_1 = C_2 = 0$, то $C = 0$ и равенство (9) справедливо для любого n.

Если $C_1 \neq 0 = C_2$, то $C = 0$ и равенство (9) сводится к равенству $C_1^m A_m \lambda_1^{mn} = C = Const$, из которого следует, что либо $A_m = 0$ (и тогда $C = 0$), либо $A_m \neq 0$ и $(\lambda_1^m)^n = 1$, т.е. $\lambda_1^m = 1$.

Аналогично – если $C_1 = 0 \neq C_2$: при $A_m \neq 0$ имеем $(\lambda_2^m)^n = 1$, т.е. $\lambda_2^m = 1$.

Если же $C_1 \neq 0 \neq C_2$, то из (6) вытекает соотношение

$F(f_{n+1}, f_{n+2}) - F(f_n, f_{n+1}) = 0$,

и если $A_s = 0$ не для всех $s \in 0, 1, \ldots, m$, то, рассматривая эти последовательные соотношения как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $({C_1}^s {C_2}^{m-s} A_s)$, приходим к равенству нулю определителя матрицы этой системы, т.е. матрицы с элементами $\lambda_1^{(n+1)s} \lambda_2^{(n+1)(m-s)} - \lambda_1^{ns} \lambda_2^{n(m-s)} = (\lambda_1^s \lambda_2^{m-s} - 1) \lambda_1^{ns} \lambda_2^{n(m-s)}$ для последовательных значений n, составленных из столбцов для значений s, соответствующих неравенствам $A_s \neq 0$:

$$C_1^s C_2^{m-s} A^s (\lambda_1^s \lambda_2^{m-s} - 1) \left(\begin{array}{c} \lambda_1^{ns} \lambda_2^{n(m-s)} \\ \lambda_1^{(n+1)s} \lambda_2^{(n+1)(m-s)} \\ \ldots \\ \lambda_1^{(n+l)s} \lambda_2^{(n+l)(m-s)} \end{array} \right) \tag{10}$$

где l – количество таких s, что $A_s \neq 0$.

Таким образом,

$$0 = \left| \begin{array}{ccc} \lambda_1^{ns_1} \lambda_2^{n(m-s_1)} & \ldots & \lambda_1^{ns_l} \lambda_2^{n(m-s_l)} \\ \lambda_1^{(n+1)s_1} \lambda_2^{(n+1)(m-s_1)} & \ldots & \lambda_1^{(n+1)s_l} \lambda_2^{(n+1)(m-s_l)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(n+l)s_1} \lambda_2^{(n+l)(m-s_1)} & \ldots & \lambda_1^{(n+l)s_l} \lambda_2^{(n+l)(m-s_l)} \end{array} \right| =$$

$$= (\lambda_1^{ns_1} \cdot \lambda_2^{n(m-s_1)} \cdot \ldots \cdot \lambda_1^{ns_l}\lambda_2^{n(m-s_l)}) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{s_1}\lambda_2^{(m-s_1)} & \ldots & \lambda_1^{s_l}\lambda_2^{(m-s_l)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{ls_1}\lambda_2^{l(m-s_1)} & \ldots & \lambda_1^{ls_l}\lambda_2^{l(m-s_l)} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1^{s_1+\ldots+s_l}\lambda_2^{lm-(s_1+\ldots+s_l)})^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {u_1}^l & {u_2}^l & \ldots & {u_l}^l \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где $u_i = \lambda_1^{s_i}\lambda_2^{(m-s_i)}(i = 1, \ldots, l)$, так что этот определитель, как определитель Вандермонда, равен нулю только если $u_i = u_j$ для некоторой пары $i \neq j (i, j = 1, \ldots, l)$, что равносильно наличию соотношения

$$\lambda_1^{s_i - s_j}\lambda_2^{(m-s_i)-(m-s_j)} = (\lambda_1^{-1}\lambda_2)^{s_j - s_i} = 1, \tag{12}$$

т.е. отношение корней есть корень из единицы. Так в работе [2] на с. 215 дана ссылка на работу по определителям типа Вандермонда.

Наконец, если $l = 0$, т.е. все $A_s = 0 (s \in 0, 1, \ldots, m)$, то $C = 0$ при любых C_1, C_2. Значит, соотношение при $f_n \neq 0$ принимает вид

$$\frac{1}{{f_n}^m} = a_m \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^{m-1} + a_{m-2}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^{m-2} + \ldots + a_1\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^1 + a_0 = 0, \tag{13}$$

из которого следует, что отношение $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ при любых C_1, C_2 (кроме возможности $f_n < 0$) и любых n принимает не более m значений – корней уравнения (13). Ясно, что среди этих значений могут быть λ_1 и λ_2 (для этого достаточно взять $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$). Это дает следствие уравнений $A_0 = 0$ и $A_m = 0$. Если же $C_1 \neq 0 \neq C_2$, то

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{C_1\lambda_1^{n+1}}{C_1\lambda_1^n} \cdot \frac{[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}]}{[1 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n]} = \lambda_1 \cdot \frac{1 + D\mu^{n+1}}{1 + D\mu^n} \tag{14}$$

(где $D = \frac{C_2}{C_1}, \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$).

Записывая равенство нулю всех $A_s = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, m)$ как систему линейных однородных уравнений относительно $a_0, a_1, \ldots, a_m$ вычислим определитель этой системы. Оказывается, он есть многочлен от $\mu = \lambda_2\lambda_1$, равный степени многочлена $(\mu - 1)$, умноженный на некоторую степень λ_1. Следовательно, он может быть (при $\lambda_1 \neq 0$) равным нулю только при $\mu = 1$, т.е. при $\lambda_1 = \lambda_2$.

Получаем итоговое

Утверждение 1. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то линейное рекуррентное соотношение второго порядка с постоянными коэффициентами допускает нетривиальное однородное соотношение (СС) первого порядка тогда и только тогда, когда некоторое произведение целых степеней корней равно единице: $\lambda_1^r\lambda_2^t = 1, (r, t \in \mathbf{Z})$.

Для произвольного N задача поиска соотношения первого порядка ставится аналогично: существует ли связь $f_n = \sum\limits_{i=1}^{N} D_i\lambda_i^n$ с $f_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{N} D_i\lambda_i^{n+1}$ $(D_i = Const, \lambda_i$ все различные, $i = 1, \ldots, N)$, в виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_{n+1}^{N-j} f_n^j = C \tag{15}$$

уравнения степени N с постоянными коэффициентами?

Пусть $a_i = D_i\lambda_i^n$, тогда

$$f_n = a_1 + \ldots + a_N, \tag{16}$$

$$f_{n+1} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_N a_N, \tag{17}$$

$$f_n^s = \sum \frac{s!}{s_1! \dots s_N!} a_1^{s_1} \dots a_N^{s_N}, \tag{18}$$

$$f^s{}_{n+1} = \sum_{s_1 + \ldots + s_N} \frac{s!}{s_1! \dots s_N!} (\lambda_1 a_1)^{s_1} \dots (\lambda_N a_N)^{s_N} = \sum \frac{s!}{s_1! \dots s_N! = s} \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_N^{s_N} a_1^{s_1} \dots a_N^{s_N}. \tag{19}$$

Поэтому выражение для $f_{n+1}^s f_n{}^t$ записывается в виде явной, но громоздкой формулы.

Пример 1

$N = 2$,

$f_n = D_1\lambda_1^n + D_2\lambda_2^n = a_1 + a_2$,

$f_{n+1} = D_1\lambda_1^{n+1} + D_2\lambda_2^{n+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$.

$f_{n+1}^2 = \lambda_1^2 a_1^2 + 2\lambda_1\lambda_1 a_1 a_2 \lambda_2^2 a_2^2 f_n f_{n+1} = \lambda_1 a_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_1 a_2 + \lambda_2 a_2^2 f_n^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2$.

Поэтому

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2 a_1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^2 \\ f_n f_{n+1} \\ f_n^2, \end{pmatrix} \tag{20}$$

где матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 \\ \lambda_1 & (\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A(\lambda_1, \lambda_2). \tag{21}$$

При этом ее определитель равен

$\Delta = |A| = \lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1^2\lambda_2 - 2\lambda_1^2\lambda_2 =$

$= (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 4(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2] =$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)[\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2] = (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \neq 0 \tag{22}$$

при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Вычисляем определители:

$$\Delta_{a_1^2} = \begin{vmatrix} f_{n+1}^2 & 2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 \\ f_n f_{n+1} & (\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ f_n^2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = f_{n+1}^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) - f_n f_{n+1} \cdot 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 + f_n^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2^2; \tag{23}$$

$$\Delta_{a_1 a_2} = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & f_{n+1}^2 & \lambda_1^2 \\ \lambda_1 & f_n f_{n+1} & \lambda_2 \\ 1 & f_n^2 & 1 \end{vmatrix} = -f_{n+1}^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) + f_n f_{n+1}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) - f_n^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1\lambda_2; \tag{24}$$

$$\Delta_{a_2^2} = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1\lambda_2 & f_{n+1}^2 \\ \lambda_1 & (\lambda_1 + \lambda_2) & f_n f_{n+1} \\ 1 & 2 & f_n^2 \end{vmatrix} = f_{n+1}^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) - f_n f_{n+1} \cdot 2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) + f_n^2 \cdot \lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{25}$$

Следовательно, по правилу Крамера,

$$\begin{cases} a_1^2 = \frac{\Delta_{a_1^2}}{\Delta} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}[1 \cdot f_{n+1}^2 - 2\lambda_2 f_n f_{n+1} + \lambda_2^2 f_n^2], \\ a_1 a_2 = \frac{\Delta_{a_1 a_2}}{\Delta} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}[(-1) \cdot f^2{}_{n+1} - (\lambda_1 + \lambda_2) f_n f_{n+1} + (-1)\lambda_1\lambda_2 f_n^2], \\ a_2^2 = \frac{\Delta_{a_2^2}}{\Delta} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}[1 \cdot f_{n+1}^2 - 2\lambda_1 f_n f_{n+1} + \lambda_1^2 f_n^2]. \end{cases} \tag{26}$$

Поэтому:

I. Если $\lambda_1^2 = 1$, т.е. $\lambda_1 \in \{+1, \text{-}1\}$, то $a_1{}^2 = (D_1\lambda_1^n)^2 = D_1^2(\lambda_1^2)^n = D_1^2 1^n = D_1^2 = Const$ – не зависит от n; значит, для любой последовательности $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$, являющейся решением линейного рекуррентного (конечно-разностного) уравнения второго порядка $f_{n+2} - \sigma_1 f_{n+1} + \sigma_2 f_n = 0$ (где

$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \sigma_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2)$, найдется такая постоянная $Const$, что f удовлетворяет квадратичному уравнению первого порядка $f_{n+1}^2 - 2\lambda_2 f_n f_{n+1} + \lambda_2^2 f_n^2 = C$ $(C = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 D_1^2)$.

II. Если $\lambda_1\lambda_2 = 1$, то $a_1 a_2 = D_1 D_2 \lambda_{2n} = D_1 D_2 = Const$ - не зависит от n, значит, для любой последовательности f_n, являющейся решением $f_{n+2} - \sigma_1 f_{n+1} + f_n = 0$ (здесь $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 = 1$), найдется такая постоянная $C = Const$, что f удовлетворяет квадратному уравнению первого порядка ${f^2}_{n+1} - (\lambda_1 + \lambda_2) f_n f_{n+1} + {f_n}^2 = C$ ${f^2}_{n+1} - \sigma_1 f_n f_{n+1} + {f_n}^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 D_1 D_2$.

III. Случай $\lambda_2^2 = 1$ симметричен первому случаю.

Пример 2

Пример Маркова для $\lambda = 1$ ("артиллерийская вилка"), т.е. когда последующее значение есть среднее арифметическое значение двух предыдущих [3, 2].

При $k = 2$ получаем: $f_{n+2} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}$.

Отсюда $f_{n+2} - \frac{1}{2} f_{n+1} - \frac{1}{2} f_n$.

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$.

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$.

$\lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$;

$\lambda_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

$$f_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 + \frac{C_2}{2^n}. \tag{27}$$

Тогда решение в общем виде

$$\{ f_0 = C_1 + C_2, f_1 = C_1 - \frac{1}{2} C_2. \tag{28}$$

$$\{ f_0 - f_1 = \frac{3}{2} C_2, f_1 = C_1 - \frac{1}{3}(f_0 - f_1). \tag{29}$$

$$\{ C_2 = \frac{2}{3}(f_0 - f_1), C_1 = \frac{f_0 + 2f_1}{3}. \tag{30}$$

Из $\lambda = 1$ имеем квадратическую зависимость

$$f_{n+1}^2 - 2\lambda_2 f_{n+1} f_n + \lambda_2^2 f_n^2 = 0, \tag{31}$$

т.е., т.к. $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$,

$$f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_n + \frac{1}{4} f_n^2 = Const. \tag{32}$$

Взяв $f(0) = 1, f(1) = 2$ [3], найдем при $n = 0 : 2^2 + 2 + \frac{1}{4} = 4 + 2 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, и поэтому

$$f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_n + \frac{1}{4} f_n^2 = \frac{25}{4}, \tag{33}$$

т.е. f_{n+1} находится через f_n как решение квадратного уравнения

$$f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_n + \frac{1}{4}(f_n^2 - 25) = 0, \tag{34}$$

$$f_{n+1} = -\frac{1}{2} f_n \pm \sqrt{\frac{1}{4} f_n^2 - \frac{1}{4} f_n^2 + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} f_n \pm \frac{5}{2}. \tag{35}$$

Результаты расчетов представим в таблице 1.

Все значения f_n имеют знак $+$, т.к. $f_n > 0$.

Получим линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$f_{n+1} = -\frac{1}{2} f_n + \frac{5}{2}, \tag{36}$$

что завершает рассмотрение примера.

Таблица 1: Зависимость f_n от n

n	f_n
0	1
1	$2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$
2	$\frac{3}{2} = -1 + \frac{5}{2}$
3	$\frac{7}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{2}$
4	$\frac{13}{8} = -\frac{7}{8} + \frac{5}{3}$

В общем случае вид $F(f_n, \ldots, f_{n+N})$ может зависеть от четности n или, более общо, от остатка деления на некоторое число.

В работах [5, 6] рассмотрены некоторые случаи уравнений второго порядка.

В данной работе получены некоторые условия построения такой зависимости для уравнений высших порядков как аналога нахождения промежуточного интеграла [4].

Ясно, что такие условия должны формулироваться в терминах свойств корней характеристического уравнения, которые мы на данном этапе считаем различными. Тривиальный случай наличия нулевого корня не рассматривается.

Например, очевидно, из предыдущего вытекает

Утверждение 2. Зависимость F будет линейной с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда один из корней характеристического уравнения равен единице.

Получено общее

Утверждение 3. Пусть произведение N чисел, каждое из которых является корнем характеристического уравнения, равно единице. Тогда существует искомая зависимость в виде однородного многочлена F степени N.

Рекуррентное соотношение можно рассматривать не только над числовыми, но и над конечными полями. На с. 249 [2] Марков в конце главы VI пишет: одно из применений выводов этого параграфа можно найти в моей статье "Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь"(Зап. Акад. Наук, VII серия, том XX).

Одним из практических примеров использования рекуррентных последовательностей являются генераторы псевдослучайных чисел, которые нашли широкое применение в различных областях, например, криптографии. Помимо генераторов линейной последовательности используются генераторы на регистрах сдвига с нелинейной функцией обратной связи. Эти генераторы порождают нелинейные рекуррентные последовательности, которые по своим диагностическим свойствам отличаются от линейных. В частности, в n-разрядном нелинейном генераторе достаточно просто порождается двоичная последовательность де Брейна. Она представляет собой нелинейную двоичную последовательность x_i периода $T = 2^n$, в которой всевозможные векторы $(x_j, x_{j+1}, \ldots x_{j+n-1})$ длины n при любом j встречается только один раз. Исключение запрещенного нулевого состояния всех триггеров генератора позволяет увеличить период формируемой последовательности и сделать его максимально возможным, равным 2^m, повысить ее качество, так как вероятности появления 0 и 1 становятся равными 0,5. Последовательности длиной 2^m называются последовательностями де Брейна.

Последовательность де Брёйна — последовательность $a_1, \ldots, a_t$, элементы которой принадлежат заданному конечному множеству, обычно рассматривают множество $0, 1, \ldots, k-1$ и все подпоследовательности $a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}$ заданной длины n различны.

При $k = 2$ существуют такие циклы де Брёйна с длиной, на единицу меньшей максимума, которые выражаются линейными рекуррентными соотношениями порядка n: так, при $n = 3$ соотношение $x_n = x_{n-2} + x_{n-3} (mod 2)$ порождает последовательности с периодом 7, например, 0010111001011100… (цикл де Брёйна 0010111). На основе таких последовательностей построен, в частности, циклический избыточный код $CRC32(EDB88320)$.

Так на с. 250 [2] Марков в начале главы VII "Связь линейных уравнений в конечных разностях второго порядка с непрерывными дробями"пишет: в настоящее время область исследований о которых мы предполагаем сказать несколько слов, принадлежит к числу заброшенных, что отчасти можно объяснить трудностью получить в ней новые результаты.

Итак, получены условия возможности понижения порядка линейного разностного уравнения, для уравнения второго порядка являющиеся необходимыми и достаточными.

Список литературы

[1] V. N. Ushakov. Egyptian triangles and the Fibonacci numbers. *Empire of mathematics*, 11:21–60, 2001. (in Russian) = В. Н. Ушаков. Египетские треугольники и числа Фибоначчи. *Империя математики*, 11:21–60, 2001.

[2] A. A. Markov. *Calculus of finite differences.* Odessa, Printing House Of Joint South-Russian Society Of Printing, 1910. (in Russian) = А. А. Марков. *Исчисление конечных разностей.* Одесса, Типография Акционерного Южно-Русского Общества Печатного Дела, 1910.

[3] A. O. Gelfond *Calculus of finite differences.* Moscow, Nauka, 1967. (in Russian) = А. О. Гельфонд. *Исчисление конечных разностей.* Москва, Наука, 1967.

[4] A. F. Sidorov, V. P. Shapeev, N. N. Yanenko *The method of differential relations and its applications in gas dynamics.* Novosibirsk, Nauka. Sib. otd-nie, 1984. (in Russian) = А. Ф. Сидоров, В. П.Шапеев, Н. Н. Яненко. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.* Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.

[5] K. L. Geut, S. S. Titov On the problem of constructing a nonlinear recurrent sequences. *IV interdisciplinary young scientists ' conference, Ural branch of RAS Information school of young scientists / collection of scientific works of the Central scientific library UB RAS.*, Ekaterinburg, 203–208. 2013. (in Russian) = К. Л. Геут, С. С. Титов. О задаче построения нелинейных рекуррентных последовательностей. *IV междисциплинарная молодежная научная конференция УрО РАН Информационная школа молодого ученого / сб. научных трудов ЦНБ УрО РАН.* Екатеринбург, 203–208, 2013.

[6] K. L. Geut, S. S. Titov On the construction of nonlinear recurrence relations. *Problems of theoretical and applied mathematics and its applications / Proceedings of the 46th national youth conference.*, Ekaterinburg, UB RAS, 3–6. 2015. (in Russian) = К. Л. Геут, С. С. Титов. О построении нелинейных рекуррентных соотношений. *Проблемы теоретической и прикладной математики и ее приложений / Труды 46-й Всероссийской молодежной конференции.*, Екатеринбург, УрО РАН, 3–6, 2015.

On the problem of reducing the order of linear recurrence equations with constant coefficients

Kristina L. Geut
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Sergei S. Titov
Ural State University of Railway Transport (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. The paper deals with the relations that define non-linear recursion of the first order for a general linear recurrence relation of the second order with constant coefficients. The conditions of the existence of such relations are found. Examples are given.

Keywords: linear recurrence relation, nonlinear recurrence relation; Fibonacci numbers, difference equations.