Маршрутная оптимизация на объектах использования ядерной энергии и в машиностроении

А.А. Петунин[1]
a.a.petunin@urfu.ru

А.Н. Сесекин[1,2]
a.n.sesekin@urfu.ru

О.Л. Ташлыков[1]
o.l.tashlykov@urfu.ru

А.Г. Ченцов[1,2]
chentsov@imm.uran.ru

1– Уральский федеральный университет (Екатеринбург)
2– Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

Рассматриваются задачи маршрутизации, возникающие на объектах использования ядерной энергии и в машиностроении при фигурной резке листового металла на станках с ЧПУ. Общей составляющей у этих задач является проблема выбора очередности выполнения заданных работ при наличии нестандартных ограничений на очередность выполнения работ и нетрадиционные варианты формирования функционала, описывающего качество работы. Описана процедура построения оптимального решения задачи на основе метода динамического программирования.

Ключевые слова: маршрутизация, динамическое программирование, условия предшествования, доза облучения, станки с ЧПУ.

1 Содержательные постановки задачи

В работе рассматривается математическая модель, содержательным источником которой являются две задачи из различных сфер человеческой деятельности. Первая из содержательных задач возникает в связи с проблемой минимизации дозы облучения персонала при выполнении профилактических и ремонтных работ на объектах использования ядерной энергии. Простые примеры [1] показывают, что при работе в неоднородном радиационном поле суммарная доза облучения может существенно зависеть от очередности выполнения работ. Кроме того, на очередность выполнения работ обычно накладываются ограничения предшествования, обусловленные технологическими особенностями объектов, на которых выполняются работы. Эта задача подобна известной задаче коммивояжера [2, 3, 4], отягощенной условиями предшествования. Кроме того, с учетом возможной многовариантности перемещений здесь может возникать задача о посещении мегаполисов. Еще более сложный вариант маршрутной задачи возникает при демонтаже радиационно опасного оборудования [1]. В этом случае аддитивная функция стоимости будет обладать слагаемыми, зависящими от списка еще не выполненных заданий. Ниже приводится пример, показывающий как будет меняться суммарная доза облучения в зависимости от очередности демонтажа радиационно опасных

In: G.A. Timofeeva, A.V. Martynenko (eds.): Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies" (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, 16-Nov-2016, published at http://ceur-ws.org

объектов. В [1, с. 99] приведен пример задачи демонтажа четырех объектов. Там просчитаны все возможные 24 варианта очередности демонтажа объектов, и показано, что наименьшая суммарная доза оказалась в два раза меньше наибольшей. Этот пример демонстрирует значимость маршрутной составляющей при минимизации суммарной дозы облучения персонала.

Вторым важным примером задач последовательного обхода мегаполисов является задача маршрутизации режущего инструмента [5, 6] при листовой фигурной резке металла на станках с ЧПУ. Эта задача также имеет своим прототипом задачу коммивояжера. Важной особенностью вышеупомянутой задачи является большое количество ограничений на очередность вырезания изделий. Здесь также имеют место условия предшествования, связанные с тем, например, что объекты, внешние контуры которых расположенные внутри других каких-либо объектов, должны вырезаться в первую очередь. Кроме того присутствуют так называемые динамические ограничения, которые могут порождаться тепловыми полями, возникающими под действием режущего инструмента и изменяющие жесткость листа и последняя величина становится функцией времени. Важной составляющей задачи является определение точки врезки, расположенной около вырезаемого контура. Естественная дискретизация в этом случае приводит к тому, что в окрестности контура возникает конечное число возможных точек врезки, которые образуют так называемый “мегаполис”, соответствующий данному контуру.

2 Постановка задачи

Пусть X — непустое множество, $x^0 \in X$ (база процесса), $N \in \mathbf{N} := \{1; 2; \ldots\}$, $N \geq 2$; конечные множества

$$M_1 \in \operatorname{Fin}(X), \ldots, M_N \in \operatorname{Fin}(X)$$

именуем мегаполисами и полагаем, что

$$\left(x^0 \notin M_j \ \forall j \in \overline{1,N}\right) \ \& \ (M_p \cap M_q = \emptyset, \quad p \neq q);$$

заданы непустые отношения $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_N$:

$$\widetilde{M}_1 \subset M_1 \times M_1, \ldots, \widetilde{M}_N \subset M_N \times M_N. \tag{1}$$

Требуется организовать перемещения

$$x^0 \to \left(x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \longrightarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}\right) \to \ldots \to \left(x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \longrightarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}\right), \tag{2}$$

для которых $z_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}) \in \widetilde{M}_{\alpha(1)}, \ldots, z_N = (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \widetilde{M}_{\alpha(N)}$; объекты выбора: α — перестановка $\overline{1,N}$, $z_1, \ldots, z_N$.

Характерный пример отношений (1): в задаче управления инструментом при листовой резке на станках с ЧПУ каждое отношение $\widetilde{M}_j$ «составлено» из упорядоченных пар (x_*, x^*), где x_* — точка врезки, а x^* — точка выключения инструмента, соответствующая точке x_*.

Условия предшествования. Пусть $\mathbf{P}$ — множество всех перестановок $\overline{1,N}$ (т.е. маршрутов). Допускаем, что выбор $\alpha \in \mathbf{P}$ может быть стеснен условиями предшествования.

Итак, фиксируем множество $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$ упорядоченных пар z, именуемых адресными;
$\mathrm{pr}_1(z)$ — индекс «отправителя»,
$\mathrm{pr}_2(z)$ — индекс «получателя».
Каждый «отправитель» должен посещаться ранее соответствующего «получателя».
Постулируем, что для всякого непустого множества $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$, непременно $\exists\, z_0 \in \mathbf{K}_0$:

$$\mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \forall\, z \in \mathbf{K}_0. \tag{3}$$

В практических задачах условие (3), как правило, выполняется.

Пусть $\mathbf{A}$ — множество всех маршрутов $\alpha \in \mathbf{P}$, обладающих $\mathbf{K}$-допустимостью (по предшествованию): $\forall\, z \in \mathbf{K}\ \forall\, t_1 \in \overline{1,N}\ \forall\, t_2 \in \overline{1,N}$

$$((\alpha(t_1) = \mathrm{pr}_1(z)) \ \& \ (\alpha(t_2) = \mathrm{pr}_2(z))) \Rightarrow (t_1 < t_2).$$

Эквивалентное представление в терминах **обратных** перестановок:

$$\mathbf{A} = \{\alpha \in \mathbf{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \forall\, z \in \mathbf{K}\}.$$

Тогда (при условии (3)) $\mathbf{A} \neq \emptyset$,

$$\widetilde{X} := \{x^0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\right) \in \mathrm{Fin}(X)$$

(«сокращаем» фазовое пространство);

$$\mathbf{X} := \{x^0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\right) \in \mathrm{Fin}(\widetilde{X}),$$

где $\mathbf{M}_j := \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbf{M}_j\} \ \forall\, j \in \overline{1,N}$.

Через $\mathbf{Z}$ обозначаем множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \to \widetilde{X} \times \mathbf{X}$. Трассы (траектории), согласованные с маршрутом: если $\alpha \in \mathbf{P}$, то в соответствии с (2)

$$\mathcal{Z}_\alpha := \{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbf{Z} \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \ \&\ (z_t \in \widetilde{M}_{\alpha(t)} \ \forall\, t \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Z})$$

(движения в пространстве упорядоченных пар).

В виде $\mathbf{D} := \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbf{Z})$ имеем (непустое) множество допустимых решений (ДР), определенных каждое в виде пары маршрут-трасса.

Функции стоимости, формирующие аддитивный критерий

Через $\widetilde{N}$ обозначаем семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$: $\widetilde{N} := \mathcal{P}'(\overline{1,N})$.

Фиксируем $\mathbf{c} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{N} \to [0, \infty[$, $c_1 : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{N}, \ldots, c_N : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{N}$, $f : \widetilde{X} \to [0, \infty[$.

Здесь $\mathbf{c}$ оценивает внешние перемещения; c_j — «внутренние» работы, связанные с посещением M_j, где $j \in \overline{1,N}$, а f — терминальное состояние (элемент $x_{N,2}$ в (2)).

Значения $\mathbf{c}(x, y, K)$ функции $\mathbf{c}$ содержательны в одном из двух случаев:

1. $x = x^0, y \in M_j$, где $j \in K$ при $K \in \widetilde{N}$ (т.е. $K \neq \emptyset, K \subset \overline{1,N}$);

2. $x \in \widetilde{M}_i,\ y \in \widetilde{M}_j,\ i \neq j,\ j \in K$, где $K \in \widetilde{N}$.

Затем используется произвольное продолжение данных содержательных зависимостей до функции на $\widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{N}$.

При $j \in \overline{1,N}$ значения $c_j(x, y, K)$ содержательны при $(x, y) \in \widetilde{M}_j$ и $K \in \widetilde{N}$ со свойством $j \in K$.

Значения $f(x)$ существенны при $x \in \mathbf{X} \setminus \{x^0\}$.

Продолжение этих содержательных зависимостей до функций на $\widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{N}$ и на $\widetilde{X}$ соответственно может быть произвольным.

При $\alpha \in \mathbf{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \widetilde{Z}$ полагаем, что

$$\widetilde{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] := \sum_{t=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \{\alpha(l) : l \in \overline{t,N}\}) + c_{\alpha(t)}(z_t, \{\alpha(l) : l \in \overline{t,N}\})] + f(\mathrm{pr}_2(z_N)) \qquad (4)$$

(учитываем стандартное правило $A \times B \times C = (A \times B) \times C$; поэтому $c_{\alpha(t)}(z_t, \{\alpha(l) : l \in \overline{t,N}\}) = c_{\alpha(t)}((x_t, y_t), \{\alpha(l) : l \in \overline{t,N}\}) = c_{\alpha(t)}(x_t, y_t, \{\alpha(l) : l \in \overline{t,N}\})$, где $x_t = \mathrm{pr}_1(z_t)$ и $y_t = \mathrm{pr}_2(z_t); t \in \overline{1,N}$).

Используем (4) при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, получая аддитивный критерий качества.

$$\widetilde{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min,\ \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha \qquad (5)$$

(минимизировать (4) на непустом конечном множестве $\mathbf{D}$ всевозможных ДР). Задаче (5) соответствует значение (глобальный экстремум)

$$V := \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \widetilde{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \in [0, \infty[$$

и (непустое) множество

$$\mathbf{D}_{\rm opt} := \{(\alpha^0, \mathbf{z}^0) \in \mathbf{D} | \widetilde{C}_{\alpha^0}[\mathbf{z}^0] = V\} \neq \emptyset.$$

Цель: найти V и какое-либо решение $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbf{D}_{\rm opt}$.

Для достижения этой цели используют аппарат ДП.

3 Динамическое программирование

Введем (см. [2, ч. 2]) в рассмотрение отображение

$$\mathbf{I} : \widetilde{N} \to \widetilde{N}, \tag{6}$$

посредством соглашения: если $K \in \widetilde{N}$, то

$$\mathbf{I}(K) := K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\}, \tag{7}$$

где $\Xi[K] = \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \ \& \ (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Выражения (6), (7) определяют оператор вычеркивания (заданий из списка). Действие его таково, что из списка удаляем «получателей» адресных пар, «полностью» укладывающихся в список.

Пусть $\mathcal{G} := \{K \in \widetilde{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$ и

$$\mathcal{G}_s := \{K \in \mathcal{G} \,|\, s = |K|\} \ \ \forall s \in \overline{1,N}.$$

При этом $\mathcal{G}_1 = \{\{t\} \ : \ t \in \overline{1,N} \backslash \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 := \{\mathrm{pr}_1(z) : x \in \mathbf{K}\}$; ясно, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$. Наконец (см. [7]) $\mathcal{G}_{s-1} = \{K \backslash \{t\} \ : \ K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \forall s \in \overline{2,N}$. Получили рекуррентную процедуру

$$(\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}) \longrightarrow \mathcal{G}_{N-1} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{G}_1. \tag{8}$$

На основе (8) конструируются слои пространства позиций: $D_0, D_1, \ldots, D_N$ (см. подробнее [7, 8]).

При этом $D_N := \{(x^0, \overline{1,N})\}$ (синглетон, содержащий позицию $(x^0, \overline{1,N})$), $D_0 := \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{F}\}$, где

$$\mathbf{F} := \bigcup_{i \in \overline{1,N} \backslash \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i;$$

D_0 и D_N — крайние слои пространства позиций.

Теперь построим регулярные слои пространства позиций. Пусть

$$s \in \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

Тогда при $K \in \mathbf{G}_s$ последовательно определяем

$$J_s(K) := \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathbf{G}_{s+1}\},$$

$$\Phi_s[K] \ = \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbf{D}_s[K] := \{(x, K) : x \in \Phi_s[K]\}$$

(клетка пространства позиций). Наконец, при условии (9) полагаем

$$D_s := \coprod_{K \in \mathbf{G}_s} \mathbf{D}_s[K] \neq \emptyset$$

(имеется ввиду дизъюнктная сумма клеток). Таким образом, построена система слоев: $D_0, D_1, \ldots, D_N$ (все слои — непустые множества). Ключевыми свойством системы слоев является следующее: если $s \in \overline{1,N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \widetilde{M}_j$, то

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}.$$

Слои функции Беллмана: $v_0, v_1, \ldots, v_N$ определяются посредством рекуррентной процедуры на основе представления: при $s \in \overline{1,N}$

$$v_s(x,K) := \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \widetilde{M}_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z), K) + c_j(z,K) + v_{s-1}(pr_2(z), K \backslash \{j\})] \quad \forall (x,K) \in D_s. \tag{10}$$

Функция $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется явным образом $v_0(x, \emptyset) := f(x)\ \forall x \in \mathbf{F}$, а дальнейшее построение $v_1, ..., v_N$ осуществляется по рекуррентной схеме: если $s \in \overline{1,N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ нам известна, то $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяем с помощью (10). При этом [7, 8], в частности,

$$V = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \widetilde{M}_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})]. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим процедуру построения оптимального решения. Полагаем $z^{(0)} := (x^0, x^0)$ и строим решение в виде пары маршрут-трасса.

С учетом (11) выбираем $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \widetilde{M}_{\mathbf{j}_1}$ так, что

$$V = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}),$$

где $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) \in D_{N-1}$. Тогда

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \backslash \{\mathbf{j}_1\})} \min_{z \in \widetilde{M}_j} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) +$$

$$c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\})].$$

С учетом этого выбираем $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \widetilde{M}_{\mathbf{j}_2}$, для которых

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) +$$

$$+ c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}),$$

где $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}) \in D_{N-2}$.

С учетом представления V в терминах v_{N-1} имеем

$$V = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) +$$

$$+ c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}).$$

Если $N = 2$, то оптимальное решение построено. Если $N > 2$, то процедуру следует продолжать вплоть до исчерпывания $\overline{1,N}$. В итоге будут построены маршрут

$$\eta := (\mathbf{j}_s)_{s \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$$

и трасса

$$(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0,N}} \in Z_\eta$$

со свойством

$$\widetilde{C}_\eta[(z^{(t)})_{t \in \overline{0,N}}] = V.$$

Итак, $(\eta, (z^{(t)})_{t \in \overline{0,N}})$ — допустимое оптимальное решение.

4 Вставки на основе динамического программирования

Известные трудности вычислительной реализации (ЗК — одна из классических NP – полных задач) вынуждают к использованию эвристик при решении практических задач большой размерности. При этом, как правило, упомянутые эвристики должны обеспечивать безусловное соблюдение всех ограничений соответствующей задачи. Значение критерия может при этом существенно отличаться от оптимального. В этих условиях представляется, однако, естественным подход, связанный с локальным улучшением ДР посредством применения оптимизирующих вставок с возможной реализацией последних в итерационном режиме. Данный подход отражен в [9, 10, 11, 12]. Общая логика данной процедуры состоит в следующем.

Пусть заданы $\mathbf{n} \in \mathbf{N},\ \mathbf{n} \geq 3,\ \mathbf{x}_0 \in X, \mathbf{L}_1 \in \mathrm{Fin}(X), ..., \mathbf{L_n} \in \mathrm{Fin}(X), \widetilde{\mathbf{L}}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1), ..., \widetilde{\mathbf{L}}_\mathbf{n} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L_n} \times \mathbf{L_n})$, причем $\mathbf{L}_j,\ j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, попарно дизъюнктны; $\mathbf{x}_0 \notin \mathbf{L}_t\ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Предполагается, что $\mathbf{n}$ — достаточно большое число. Предметом исследования являются процессы

$$\mathbf{x}_0 \longrightarrow (x_{1,1} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)} \longrightarrow x_{1,2} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)}) \longrightarrow ... \longrightarrow (x_{\mathbf{n},1} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})} \longrightarrow (x_{\mathbf{n},2} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})}), \tag{12}$$

где α — перестановка $\overline{1,\mathbf{n}}$; требуется при этом, чтобы

$$(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \widetilde{\mathbf{L}}_{\alpha(1)}, ..., (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{1},2}) \in \widetilde{\mathbf{L}}_{\alpha(\mathbf{n})}. \tag{13}$$

Объектом нашего выбора являются перестановка α и кортеж $((x_{1,1}, x_{1,2}), ..., (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{n},2}))$. Ситуация вполне соответствует постановке, связанной с (2). Полагаем, однако, что $N \in \overline{2, \mathbf{n}-1}$, т.е. задача раздела 2 "меньше"в смысле размерности. Реально значение $\mathbf{n}$ значительно больше, чем N. С процессами (12), (13) связывается "аддитивная"задача маршрутизации, в идейном отношении подобная задаче (5) (мы полагаем, что в "большой"задаче имеются условия предшествования, а стоимости перемещений, как и в разделе 2, зависят от списка заданий). Разумеется при точном определении "большой"задачи используются замены

$$x^0 \longrightarrow \mathbf{x}_0,\ N \longrightarrow \mathbf{n},\ M_j \longrightarrow \mathbf{L}_j, \widetilde{M_j} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{L}}_j, \tag{14}$$

$\mathbf{K}$ также заменяется некоторым отношением в $\overline{1,\mathbf{n}}$ (в связи с точной постановкой см. [12, п. 2]). Соответствующим образом модифицируются функции стоимости раздела 2.

Предположим, что в "большой"задаче удалось каким-то образом найти ДР $(\lambda, \mathbf{h})$; здесь $\lambda : \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}$ — маршрут, допустимый по предшествованию, а $\mathbf{h}$ — трасса, согласованная с λ:

$$\mathbf{h}(1) \in \widetilde{\mathbf{L}}_{\lambda(1)}, ..., \mathbf{h}(\mathbf{n}) \in \widetilde{\mathbf{L}}_{\lambda(\mathbf{n})}.$$

Мы стремимся улучшить качество, доставляемое ДР $(\lambda, \mathbf{h})$ посредством оптимизирующей вставки "длины"N. Иными словами, мы создаем задачу раздела 2, привязанную к $(\lambda, \mathbf{h})$. Для этого выбираем $\nu \in \overline{0, \mathbf{n}-N}$ в качестве "начала"вставки, полагаем $x^0 = pr_2(\mathbf{h}(\nu))$ и $\forall s \in \overline{1,N}$

$$(M_s := \mathbf{L}_{\lambda(\nu+\mathbf{s})})\&(\widetilde{M}_s := \widetilde{\mathbf{L}}_{\lambda(\nu+\mathbf{s})}).$$

Прочие построения см. в [12, п. 3]) (в частности, функции $\mathbf{c}, c_1, ..., c_N$ и f конструируются по функциям стоимости "большой"задачи). Полученный таким образом вариант задачи (5) "обрабатывается"процедурой ДП, после чего получившееся локально оптимальное ДР задачи (5) вклеивается в исходное ДР $(\lambda_0, \mathbf{h}_0) := (\lambda, \mathbf{h})$, порождая новую эвристику $(\lambda_1, \mathbf{h}_1)$, для которой $\nu_0 := \nu$ изменяем затем до $\nu_1 \in \overline{0, \mathbf{n}-N}$ (конкретные способы получения нового "начала"ν_1 см. в [9, 10]), после чего для эвристики $(\lambda_1, \mathbf{h}_1)$, применяемой вместо $(\lambda, \mathbf{h})$ конструируется новая оптимизирующая вставка с "началом"ν_1). Далее процедура итераций продолжается вплоть до получения приемлемого значения критерия "большой"задачи).

5 Приложения к прикладным задачам

Предстоящие масштабные работы по выводу из эксплуатации объектов использования атомной энергии (ОИАЭ) определяют важность решения задачи минимизации дозовых затрат при демонтаже радиоактивного оборудования. При этом одновременно с автоматизацией и роботизацией демонтажных работ, требующими значительных материальных затрат, значительный потенциал в сокращении дозовых затрат имеет маршрутная оптимизация работ [13]. При комплексном подходе к решению данной задачи необходимо учитывать возможность оптимизации как перемещений в нестационарных радиационных полях, так и последовательности демонтажа радиоактивных элементов оборудования и систем. В настоящее время на ОИАЭ, выводимых из эксплуатации, обязательным требованием является проведение комплексного инженерного радиационного обследования (КИРО) и создание баз данных, позволяющих прогнозировать радиационную обстановку в помещениях. На основании этих данных можно решать задачи оптимизации [14]. На рис. 1 приведен план главного корпуса окончательно остановленного блока АЭС на высотной отметке 0,00 м с указанием помещений.

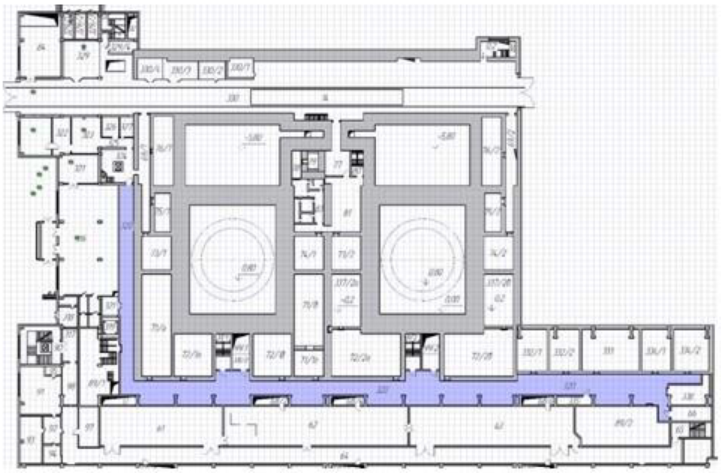

Рис. 1: Пример плана помещений блока АЭС с оборудованием, подлежащим демонтажу

На рис.2 в качестве примера комплексной оптимизации, описываемой соотношением (4) показана модель-схема из четырех помещений, каждое из которых содержит N радиоактивных объектов, подлежащих демонтажу. Первое слагаемое в правой части выражения (4) характеризует выбор оптимального

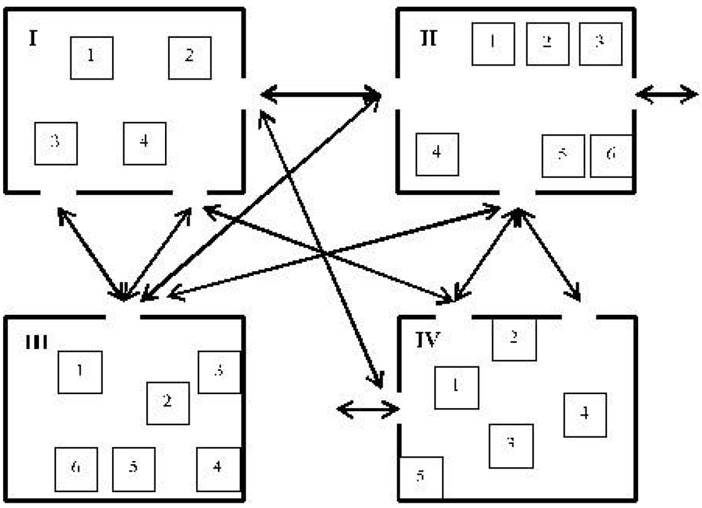

Рис. 2: Модельная схема помещений (I–IV) с радиоактивными объектами (1,2,...,n)

маршрута перемещения между помещениями мегаполисами с радиоактивными объектами, которые могут располагаться в разных местах энергоблока, на нескольких высотных отметках (этажах). Стоимость (продолжительность) маршрута выражается в единицах эффективной дозы облучения [14]. Возможные варианты перемещений между помещениями показаны стрелками. В отдельных помещениях находятся объекты (трубопроводы, оборудование и т.д.) с различной степенью радиоактивности. Одновременно с этим трудозатраты на демонтаж каждого из этих объектов различны. Общая доза облучения, получаемая работниками при демонтажных работах в помещении или на площадке, будет зависеть от выбранного маршрута "стоимость" которого определяется формулой (4). Целью решения этой задачи является определение оптимальной последовательности демонтажа радиоактивных объектов с целью минимизации облучения персонала. Модельные примеры этой задачи приведены, в частности, в [16].

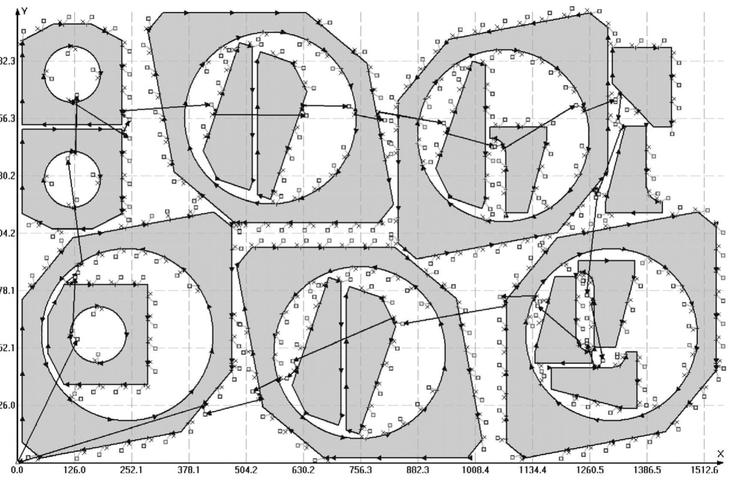

Рис. 3: Раскройный план и маршрут режущего инструмента

Реализация рассмотренных алгоритмов применительно к задаче фигурной резки металла на станках с ЧПУ приведена,например, в [17]. На рис. 3 показан пример раскройного плана, построенные вдоль контуров мегаполисы и оптимальный маршрут режущего инструмента, полученный с помощью динамического программирования.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00649, и при финансовой поддержке Правительства Российской федерации, постановление № 211, контракт № 02.A03.21.0006. .

Список литературы

[1] V. V. Korobkin, A. N. Sesekin, O. L. Tashlykov, A. G. Chentsov. *Metody marshrutizatsii i ih primenenie v zadachah povyshenia bezopastnosti b effektivnosti ekspluatazii atomnih stanzii* [Routing methods and their applications in the tasks of increasing the safety and efficiency of operation of nuclear power plants]. Moscow, "New Technologies", 2012. (in Russian) = В. В. Коробкин, А. Н. Сесекин, О. Л. Ташлыков, А. Г. Ченцов. *Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций..* М.: Издательство "Новые технологии". 2012.

[2] A. G. Chentsov. *Ekstremalnie zadachi marshrutizatsii i raspredelenia zalaybq: voprosy teorii* [Extreme tasks of routing and distribution of tasks: theory questions]. Moscow – Izhevsk, SIC Regular and chaotic dynamics, 2008. (in Russian) = А. Г. Ченцов. *Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории.* Москва – Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008.

[3] G. Gutin, A. Punnen. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations.* Berlin: Springer, 2002.

[4] W. J. Cook. *In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation.* N.J. Princeton Univer. Press., 2012.

[5] A. A. Petunin Modelling of Tool Path for the CNC Sheet Cutting Machines. *AIP Conference Proceedings*,1690: 060002(1)–060002(7). 2015.

[6] A. A. Petunin, C. Stylios. Optimization Models of Tool Path Problem for CNC Sheet Metal Cutting Machines. *IFAC - PaperOnLine*,49-12: 23-28. 2016.

[7] A. G. Chentsov. On a parallel procedure for constructing the bellman function in the generalized problem of courier with internal jobs. *Automation and Remote Control*, 73(3):532–546, 2012. = А. Г. Ченцов. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами. *Автоматика и Телемеханика*, 2:134–149, 2012.

[8] A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. Dynamic programming method in the generalized courier problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 43(3):464–472, 2008. = А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.*, 3:143–153, 2008.

[9] A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. The task of sequential bypassing megacities. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Ser. Estestvennye i tehnicheskie nauki.* 19(2):454–475, 2014. (in Russian) = А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. Задача последовательного обхода мегаполисов. *Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.*, 19(2):454–475, 2014.

[10] A. A. Petunin, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Local inserts based on dynamic programming in a routing task with constraints. *Vestnik Udmurtskogo universiteta.* №2:56–75, 2014. (in Russian) = А. А. Петунин, А. Г. Ченцов, П.А. Ченцов. Локальные вставки на основе динамического программирования в задаче маршрутизации с ограничениями. *Вестник Удмуртского университета*, №2:56–75, 2014.

[11] A. G. Chentsov. Belman's inserts in the task of routing with constraints and a complicated cost function. *Vestnik Udmurtskogo universiteta.* № 4:122–141, 2014. (in Russian) = А. Г. Ченцов. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненной функцией стоимости. *Вестник Удмуртского университета*, № 4:122–141, 2014.

[12] A. G. Chentsov. Optimizing inserts in routing tasks and their implementation based on dynamic programming. *Vestnik Udmurtskogo universiteta.* № 4:565–578, 2016. (in Russian) = А. Г. Ченцов. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования. *Вестник Удмуртского университета*, № 4:565–578, 2016.

[13] A. A. Naumov, O. L. Tashlykov. Minimization of dose costs in the repair of NPP systems and equipment. *Izvestia vuzov. Iadernaia energetika.* № 1:80–88, 2010. (in Russian) = А. А. Наумов, О. Л Ташлыков. Минимизация дозовых затрат при ремонтном обслуживании систем и оборудования АЭС. *Известия вузов. Ядерная энергетика*, № 1:80–88, 2010.

[14] O. L. Tashlykov, A. N. Sesekin, S. E. Shcheklein, A. G. Chentsov. Development of optimal algorithms for decommissioning nuclear power plants from the use of methods of mathematical modeling. *Izvestia vuzov. Iadernaia energetika.* № 2:115–120, 2009. (in Russian) = О. Л Ташлыков, А. Н. Сесекин, С. Е. Щеклеин, А. Г. Ченцов. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования. *Известия вузов. Ядерная энергетика*, № 2:115–120, 2009.

[15] F. A. Balushkin, A. N. Sesekin, O. L. Tashlykov, I. B. Cheblokov, S. E. Shcheklein, A. G. Chentsov. Use the dynamic programming method to optimize the dismantling of power units of nuclear power plants, decommissioned, in order to minimize irradiation. *Izvestia vuzov. Iadernaia energetika.* № 4:169–176, 2009. (in Russian) = Ф. А. Балушкин, А. Н. Сесекин, О. Л Ташлыков, И. Б. Чеблоков, С. Е. Щеклеин, А. Г. Ченцов. Использование метода динамического программирования для оптимизации демонтажа оборудования энергоблоков АЭС, выводимых из эксплуатации, с целью минимизации облучения. *Известия вузов. Ядерная энергетика*, № 4:169–176, 2009.

[16] A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. Dynamic programming in the routing problem with complex dependence of costs on the list of jobs. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 53(2):172–185, 2014. = А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. Динамическое программирование в задаче маршрутизации со сложной зависимостью от списка заданий. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.*, 2:26–40, 2014.

[17] A. G. Chentsov, P. A. Chentsov, A. A. Petunin, A. N. Sesekin. Routing problems: constraints and optimality. *IFAC - PaperOnLine*,49-12: 640-644. 2016.

Route optimization on the nuclear objects and in mechanical engineering

Alexander A. Petunin
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Alexander N. Sesekin Krasovskii
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Oleg L. Tashlykov
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Alexander G. Chentsov
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Abstract. The article is devoted to the routing problems at the nuclear objects and in mechanical engineering (the task of cutting sheet metal on CNC machines). The problem of choosing the sequence of work is present in these two tasks. The presence of non-traditional constraints on the order of assignments and unconventional view of the quality functional is also a common feature of these tasks. We describe the process of constructing an optimal solution based on dynamic programming method.

Keywords: routing, dynamic programming, precedence constraints, exposure dose, CNC cutting machines.