Das Erreichbarkeitsproblem für Stetige Petri-Netze ist entscheidbar

von

Nicolas Schiller

Fachbereich Mathematik
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

August 1999

Zusammenfassung

Petri-Netze werden zur Modellierung und Analyse verschiedenster Systeme verwendet. Seit einigen Jahren beschäftigen sich mehrere Forschungsgruppen mit Erweiterungen von Petri-Netzen, die die Modellierung kontinuierlicher Abläufe erleichtern. Markiert man in einem Petri-Netz die Stellen mit rellen Zahlen statt „tokens" oder „Marken", lassen sich stetige Größen wie z.B. Flüssigkeiten modellieren.
In meiner Diplomarbeit werden solche stetigen Petri-Netze im Rahmen eines gruppentheoretischen Ansatzes für Petri-Netze vorgestellt und ihre Eigenschaften untersucht. Repräsentativ wird hier das Erreichbarkeitsproblem betrachtet und ein Algorithmus vorgestellt, der es entscheidet.

1 Definition des stetigen Petri-Netzes

Ausgangspunkt für die Definition ist die gruppentheoretische Betrachtungsweise für Petri-Netze, wie sie in der Arbeitsgruppe von Prof. Bruno Brosowski an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt am Main im Laufe der letzten Jahre entwickelt wurde. Eine gute Darstellung dieses Ansatzes findet man in der Diplomarbeit [5] von Frau Petra Tix sowie in den Ausarbeitungen [1], [2] und [3] von Prof. Brosowski. Die Stellen des Netzes sind danach mit Elementen halbgeordneter Gruppen markiert (für gewöhnliche S-T-Netze die Gruppe $\mathbb{Z}$). Das Schalten von aktivierten Transitionen oder Schaltfolgen ist eine Operation in der Netzgruppe, dem kartesischen Produkt der Stellengruppen.
In [9] definieren René David und Hassane Alla Petri-Netze, deren Stellen mit reellen Zahlen markiert sind. Um diese Netze untersuchen zu können, wählen wir für jede Stelle unseres Petri-Netzes die halbgeordnete Gruppe $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$ als Stellengruppe.
Eine weitere Besonderheit dieser reell markierten Petri-Netze ist, daß jedem Schalten einer Transition eine Vielfachheit $r \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet wird, die angibt, wie oft bzw. „wieviel" die Transition schaltet. Diese Vielfachheit wird mit dem Kantengewicht der *Pre*- und *Post*kanten der Transition multipliziert und beeinflußt entsprechend die Markierungsänderung durch den Schaltvorgang (Schalten mit Vielfachheit 1 entspricht dem gewöhnlichen Schalten). Möchte man dieses Prinzip in das gruppentheoretische Konzept einordnen, so bietet es sich an, die Vielfachheiten, mit denen eine Transition schalten kann, als verschiedene Modi der Transition zu betrachten:

Definition 1.1 (Stetiges Petri-Netz) *Ein stetiges Petri-Netz ist ein Petri-Netz mit Schaltmodi*

$$\mathcal{P} = (S, T, M, Pre, Post)$$

wobei

$$\begin{array}{lcll} S & := & (s_1, \ldots, s_L) & \textit{endliche Stellenmenge} \\ T & := & (t_1, ..., t_N) & \textit{endliche Transitionenmenge} \\ S \cap T & = & \emptyset & \\ M & := & \mathbb{R}_+ & \textit{Menge der Schaltmodi} \\ Pre & : & T \times M \to \mathbb{R}_0^L & \textit{Vorkantenabbildung} \\ Post & : & T \times M \to \mathbb{R}_0^L & \textit{Nachkantenabbildung} \end{array}$$

Für die Abbildungen Pre und Post gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} Pre_{t,\mu} & = & \mu \cdot Pre_{t,1} \\ Post_{t,\mu} & = & \mu \cdot Post_{t,1} \end{array}}$$

Eine Transition $t \in T$ ist im Modus $\mu \in M$ bzgl. der Markierung $m_0 \in \mathbb{R}_0^L$ aktiviert, wenn gilt:

$$Pre_{t,\mu} \leq m_0.$$

Schaltet eine bzgl. m_0 im Modus μ akvierte Transition t im Modus μ, so geht die Markierung m_0 über in

$$m := m_0 + Post_{t,\mu} - Pre_{t,\mu}.$$

Ein Schaltmodus $\mu \in \mathbb{R}_+$ gibt die „Vielfachheit“ an, mit der die Transition t schalten soll. Wenn eine Transition t im Modus μ schaltet, sagen wir auch: t schaltet „μ-fach“. Wenn es Modi gibt, in denen eine Transition aktiviert ist sagen wir: die Transition ist aktiviert.

Die Definitionen von Schaltabbildung δ, der Menge der bei einer Markierung m aktivierten Schaltfolgen $\mathcal{S}(m)$ sowie der Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{E}(m)$ folgen den Definitionen für gewöhnliche Petri-Netze mit Schaltmodi. Setzt man

$$(C_1)_{i,j} := Post_{t_j,1}(s_i) - Pre_{t_j,1}(s_i),$$

so erhält man für eine bzgl. m aktivierte Schaltfolge ω die Übergangsgleichung

$$\delta(m, \omega) = m + C_1 \cdot V(\omega),$$

wobei anstelle des Parikhvektors der Vielfachheitenvektor $V(\omega)$ verwendet wird:

$$V_t(\omega) := \sum_{(t,\mu) \text{ enthalten in } \omega} \mu.$$

2 Das Erreichbarkeitsproblem

„Kann eine gegebene Markierung m im stetigen Petri-Netz $\mathcal{P}$ von der Startmarkierung m_0 aus erreicht werden?“ In gewöhnlichen Petri-Netzen ist die Beantwortung dieser Frage — des „Erreichbarkeitsproblems“ — zwar schwierig aber doch möglich. Die Schwierigkeiten, denen man bei der Lösung des Erreichbarkeitsproblems in diskreten Netzen begegnet, resultieren oft daraus, daß ganzzahlige Lösungen von Gleichungssystemen zu finden sind. In Anbetracht dieser Tatsache liegt die Vermutung nahe, daß in stetigen Petri-Netzen die Lösung dieses Problems leichter fallen könnte.

Die Erreichbarkeitsmenge hängt von der Startmarkierung m_0 und den $t \in T$ ab, die bei m_0 nicht tot sind.

In stetigen Netzen nennen wir eine Transition tot, wenn sie in allen Modi tot ist:

Definition 2.1 (Tote Transitionen) *Eine Transition $t \in T$ heißt* tot bei der Markierung m, *wenn für alle Markierungen $m' \in \mathcal{E}(m)$ und für alle Modi $\mu \in \mathbb{R}_+$ (t, μ) bei m' nicht aktiviert ist.*

Um zu prüfen, ob eine Transition tot ist, brauchen wir ein entsprechendes Verfahren, denn meistens kann man einem Petri-Netz nicht ohne weiteres ansehen, ob eine seiner Transitionen irgendwann einmal aktiviert werden kann, oder nicht. In stetigen Netzen ist diese Prüfung wesentlich einfacher als in gewöhnlichen Netzen:

Verfahren zur Bestimmung der nicht-toten Transitionen:
Für die Aktiviertheit einer Transition t müssen ihre Vorstellen lediglich nicht-leer (positiv markiert) sein. (Dann gibt es einen Modus, in dem t aktiviert ist.) Man schalte also alle bei m aktivierten Transitionen in einem sehr kleinen Modus, so daß alle Vorstellen dieser Transitionen weiterhin positiv markiert bleiben. Durch das Schalten können bisher leere Stellen eine positive Markierung erhalten und somit weitere Transitionen aktivieren. Nun wiederholt man das Verfahren mit diesen neu aktivierten Transitionen so oft, bis keine bisher leeren Stellen mehr markiert werden und somit keine bisher nicht aktivierte Transitionen mehr aktiviert werden. Die Transitionen aus T, die dann immer noch nicht aktiviert sind, sind tot bei m, denn keine der nicht-toten Transitionen kann zu einer Markierung führen, bei der sie aktiviert sind.

2.1 Gestalt der Erreichbarkeitsmenge

Im folgenden gehen wir davon aus, daß alle Transitionen $t \in T$ bei der Startmarkierung m_0 nicht tot sind. Sollte eine Transition bei der Startmarkierung tot sein, so betrachten wir stattdessen das Petri-Netz ohne diese Transition.

Wie sieht die Erreichbarkeitsmenge als Teilmenge des $\mathbb{R}^L$ aus und welche Rolle spielen die nicht-toten Transitionen dabei?

Definition 2.2 *Den Kegel, den die zu den Transitionen t_1 bis t_N gehörigen Vektoren $(Post_{t_1,1} - Pre_{t_1,1})$ bis $(Post_{t_N,1} - Pre_{t_N,1})$ aufspannen, bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$.*

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &:= cone\{(Post_{t_1,1} - Pre_{t_1,1}), \ldots, (Post_{t_N,1} - Pre_{t_N,1})\} \\ &= \left\{ m \in \mathbb{R}^L \mid \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0 : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot (Post_{t_i,1} - Pre_{t_i,1}) = m \right\}\end{aligned}$$

Im wesentlichen stimmt die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{E}(m_0)$ mit folgender konvexer Teilmenge des $\mathbb{R}^L$ überein:

$$E(m_0) := (m_0 + \mathcal{C}) \cap \mathbb{R}_0^L.$$

Man sieht leicht, daß alle $m \in \mathcal{E}(m_0)$ auch in der Menge $E(m_0)$ enthalten sind, denn alle Markierungen des Petri-Netzes sind aus dem positiven Quadranten $\mathbb{R}_0^L$ (es gibt keine negativen Stellenmarkierungen) und es gibt eine Schaltfolge ω, die m_0 in m überführt. Damit hat m eine Darstellung

$$m = \delta(m_0, \omega) = m_0 + \sum_{i=1}^{N} V(\omega)_i \cdot (Post_{t_i,1} - Pre_{t_i,1}) \in (m_0 + \mathcal{C}) \cap \mathbb{R}_0^L = E(m_0).$$

Die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{E}(m)$ ist also eine Teilmenge der Menge $E(m)$. Aber sind alle Elemente von $E(m)$ auch erreichbare Markierungen?

Satz 2.3 *Das relative Innere von $E(m_0)$ ist enthalten in $\mathcal{E}(m_0)$. Kurz:*

$$relint\, E(m_0) \subset \mathcal{E}(m_0).$$

Der Beweis dieses Satzes kann wegen seiner Länge hier nicht erbracht werden, ist jedoch in [6] nachzulesen.

Zusammen mit der vorausgehenden Überlegung ist gezeigt, daß

$$relint\, E(m_0) \subset \mathcal{E}(m_0) \subset E(m_0).$$

Tatsächlich können sich die beiden Mengen also nur auf dem relativen Rand voneinander unterscheiden. Die Frage ist also: Welche Punkte von $rel\partial E(m_0)$ sind erreichbar und welche nicht?

Für den Algorithmus, der uns diese Fragen beantwortet, brauchen wir den Begriff des *zu $\mathcal{P}$ dualen Netzes $\mathcal{P}^{dual}$*.

Das duale Netz $\mathcal{P}^{dual}$ erhalten wir aus dem Netz $\mathcal{P}$, indem wir sämtliche Kantenrichtungen des zugehörigen Petri-Netz-Graphen umkehren. ($Pre_{t,\mu}^{dual} = Post_{t,\mu}$ und $Post_{t,\mu}^{dual} = Pre_{t,\mu}$.) Alle abgeleiteten Größen wie δ^{dual}, $\mathcal{S}^{dual}(m)$, $\mathcal{E}^{dual}(m)$, $E^{dual}(m)$ etc. definieren wir wie im nicht-dualen Netz. Man sieht dann leicht:

$$E^{dual}(m) = (m - \mathcal{C}) \cap \mathbb{R}_0^L.$$

2.2 Ein Algorithmus zur Erreichbarkeitsprüfung

Der im folgenden präsentierte Algorithmus entscheidet, ob eine beliebige Markierung m in $\mathcal{E}(m_0)$ enthalten ist.

Das Verfahren beruht darauf, daß folgende Bedingungen erfüllt sind, wenn eine Markierung m von der Startmarkierung m_0 aus durch die Schaltfolge $\omega := (\tau_1, \mu_1) \cdots (\tau_n, \mu_n)$ erreichbar ist:

1. Alle Transitionen, die in ω vorkommen, sind nicht tot bei m_0 im Netz $\mathcal{P}$. (Dies gilt auch, wenn man alle Transitionen, die in ω nicht vorkommen, aus T herausnimmt.)
2. Alle Transitionen, die in ω vorkommen, sind nicht tot bei m im Netz $\mathcal{P}^{dual}$. (Dies gilt auch, wenn man alle Transitionen, die in ω nicht vorkommen, aus T herausnimmt.)
3. Der Vielfachheitenvektor $V(\omega)$ löst die Gleichung $C_1 \cdot x = m - m_0$ und für alle Transitionen t_i, die in ω vorkommen, gibt es positive Komponenten $V(\omega)_i$ von V.

Gegeben seien ein stetiges Petri-Netz $\mathcal{P} = (S, T, G, Pre, Post, M)$ mit einer Startmarkierung m_0 und eine beliebige Markierung m des Netzes. Ist m aus $\mathcal{E}(m_0)$?

Betrachten wir die stetigen Petri-Netze $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{end\}$:

$$\mathcal{P}_n := (S, T_n, G, Pre^n, Post^n, M)$$

wobei

$$\begin{array}{lcl} T_0 & := & T \\ Pre^n & : & Pre|_{T_n \times M} \\ Post^n & : & Post|_{T_n \times M} \\ (C_1^n)_{(i,j)} & := & \left(Post^n_{t'_j,1}(s_i) - Pre^n_{t'_j,1}(s_i)\right), \quad \text{mit } T_n = \{t'_1, \ldots, t'_k\} \end{array}$$

Die Werte, die T_n für $n \neq 0$ annimmt, ergeben sich gemäß dem unten stehenden Algorithmus. Alle abgeleiteten Begriffe erhalten entsprechend der Transitionenmenge ihres Netzes den Index n bzw. *end*:

Erreichbarkeitstest

1. START — Iterationsbeginn

   $n := 0$

2. Streiche Transitionen, die bei m_0 tot sind.

   für alle $t \in T_n$:

   wenn t tot ist bei m_0 im Netz $\mathcal{P}_n$: *Verfahren Seite 2*
   $T_{n+1} := T_n \setminus \{t\}$ *streiche t*
   $n := n + 1$ *erhöhe n*
   gehe zu 2.

3. Streiche Transitionen, die bei m dual-tot sind.

   für alle $t \in T_n$:

   wenn t tot ist bei m im Netz $\mathcal{P}_n^{dual}$: *Verfahren Seite 2*
   $T_{n+1} := T_n \setminus \{t\}$ *streiche t*
   $n := n + 1$ *erhöhe n*
   gehe zu 2.

4. Streiche Transitionen, die nicht im Träger einer positiven Lösung sind.

   für alle $t \in T_n$:

   wenn keine pos. Lösung x mit $x_t > 0$ des
   Gleichungssystems $C_1^n \cdot x = m - m_0$ existiert: *Max.Prob. S. 5*
   $T_{n+1} := T_n \setminus \{t\}$ *streiche t*
   $n := n + 1$ *erhöhe n*
   gehe zu 2.

5. ENDE — Wenn $T_{end} \neq \emptyset$, dann können die übriggebliebenen Transitionen m_0 in m überführen.

   $T_{end} := T_n$

Bemerkungen (ohne Beweis):

- Für alle $t \in T_{end}$ gilt:
  t ist nicht tot bei m_0 in $\mathcal{P}_{end}$,
  t ist nicht tot bei m in $\mathcal{P}_{end}^{dual}$,
  Es existiert eine positive Lösung x von $C_1^n \cdot x = m - m_0$ mit $x_t > 0$.

Um in Schritt 4 die gesuchten positiven Lösungen zu finden, müssen wir folgendes Maximierungsproblem lösen:

> Maximiere x_j (j-te Transition) unter den Nebenbedingungen
> $$x \geq 0, \qquad C_1^n \cdot x = m - m_0.$$

Wir erhalten drei mögliche Fälle:

1. Es gibt eine Lösung $x_j > 0$, dann sind wir fertig.
2. Die Lösung ist $x_j = 0$, dann gibt es keine Lösung x mit $x_j > 0$.
3. Es gibt keine Lösung.

Hat das Maximierungsproblem keine Lösung, so müssen wir prüfen, ob die zulässige Menge Z_{max} leer ist. In diesem Fall gibt es keine Lösung x mit $x_j > 0$. Ist die zulässige Menge jedoch nicht leer, so kann x_j beliebig groß werden und es existiert eine Lösung x mit $x_j > 0$.

Welcher dieser beiden Fälle eingetreten ist, können wir mit Hilfe eines linearen Minimierungsproblems entscheiden (näheres dazu in Skript [4]).

Der Algorithmus muß also schlimmstenfalls $N^2 + N$ lineare Optimierungsprobleme lösen (die mit kleiner werdender Transitionenmenge T_n in Ihrer Komplexität abnehmen), um zu einem Ergebnis zu kommen. ($2N$ im ersten Durchgang, dann $2(N-1)$ usw.)

Unter Anwendung dieses Algorithmus können wir den folgenden Satz beweisen:

> **Satz 2.4 Das Erreichbarkeitsproblem für stetige Petri-Netze ist entscheidbar.**

Für den Beweis werden wir nachstehenden Hilfssatz benötigen (Beweis in [6]):

Lemma 2.5 (Kegelinneres) *Sei $\mathcal{C}$ der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Kegel im $\mathbb{R}^n$. Dann ist m genau dann aus dem relativen Inneren von $\mathcal{C}$, wenn es Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$ gibt, so daß*

$$m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i.$$

Beweis des Satzes 2.4:

Seien $\mathcal{P}$, m_0 und m gegeben. Ist $m \in \mathcal{E}(m_0)$?

Wir wenden den obigen Algorithmus an:

Behauptung: Ist $T_{end} = \emptyset$, so ist $m \notin \mathcal{E}(m_0)$, sonst ist $m \in \mathcal{E}(m_0)$.

Beweisskizze:

0. Der Algorithmus hält immer:

Für $T_n = \emptyset$ ist $T_{end} = \emptyset$ und der Algorithmus hält.
Es gilt: T_0 ist endlich und T_{n+1} ist eine echte Teilmenge von T_n.
Also hält der Algorithmus immer nach endlich vielen Schritten.

Es ist zu zeigen: $m \in \mathcal{E}(m_0) \iff T_{end} \neq \emptyset$

1. "$\Longrightarrow$"

Sei $m \in \mathcal{E}(m_0)$, $m \neq m_0$

Dann existiert eine Schaltfolge ω, die m_0 in m überführt. Alle Transitionen, die in ω vorkommen, sind nicht tot bei m_0, nicht tot bei m im dualen Netz und der Vielfachheitenvektor $V(\omega)$ löst die Gleichung $C_1 \cdot x = m - m_0$. Also sind alle diese Transitionen in allen T_n (inklusive T_{end}) enthalten.

2. "$\Longleftarrow$"

Sei $T_{end} = \{t'_1, \ldots, t'_k\} \subset T$.

Zu zeigen ist: Es existiert eine Schaltfolge $\omega \in \mathcal{S}(m_0)$ mit $\delta(m_0, \omega) = m$.

Durch den Algorithmus ist gewährleistet, daß es ein $\lambda \in \mathbb{R}^k$ gibt, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, so daß

$$m = m_0 + C_1^{end} \cdot \lambda \quad \text{und} \quad m_0 = m - C_1^{end} \cdot \lambda.$$

Da alle Koeffizienten λ_i positiv sind, folgt nach Lemma 2.5:

$$m \in relint\,(m_0 + \mathcal{C}_{end}) \qquad \text{und} \qquad m_0 \in relint\,(m - \mathcal{C}_{end}).$$

Da m_0 im relativen Inneren von $m - \mathcal{C}_{end}$ liegt, gibt es eine relative Umgebung von m_0, die komplett in $m - \mathcal{C}_{end}$ liegt. Da jede Umgebung von m_0 das relative Innere von $E_{end}(m_0)$ trifft, gibt es ein m'_0, das im Schnitt dieser beiden Mengen liegt. Da $E_{end}(m_0)$ im positiven Quadranten liegt, ergibt sich:

$$m'_0 \in relint E_{end}(m_0) \cap E_{end}^{dual}(m).$$

Genauso findet man ein

$$m' \in relint E_{end}^{dual}(m) \cap E_{end}(m_0).$$

Da $E_{end}(m_0)$ und $E_{end}^{dual}(m)$ konvex sind folgt:

$$relint\,\overline{m'_0 m'} \subset relint E_{end}(m_0) \cap relint E_{end}^{dual}(m).$$

Die Punkte aus dem relativen Inneren der Verbindungsstrecke von m'_0 und m sind nach Satz 2.3 sowohl in $\mathcal{E}(m_0)$ als auch in $\mathcal{E}^{dual}(m)$. Ist die Menge der relativ inneren Punkte leer, so muß $m'_0 = m'$ sein.

Auf jeden Fall gibt es Markierungen, die von m_0 aus erreicht werden können und gleichzeitig in der Erreichbarkeitsmenge von m im dualen Netz liegen. Das heißt, es gibt Schaltfolgen ω_1 und ω_2, so daß

$$\delta(m_0, \omega_1) = \delta^{dual}(m, \omega_2).$$

Die daraus zusammengesetzte Schaltfolge ω überführt m_0 in m:

$$\omega := \omega_1 (\omega_2)^{dual} \qquad \delta(m_0, \omega) = m.$$

$\square$

Bemerkung:

- **Da wir entscheiden können, ob eine gegebene Markierung von einer Startmarkierung aus erreicht werden kann, ist es nicht möglich, mit einem stetigen Petri-Netz eine Turing-Maschine zu konstruieren, denn dann könnten wir das Halteproblem für diese Maschine entscheiden.**

Literatur

[1] Bruno Brosowski, *Petri-Netze I+II*, Vorlesungsskripten, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt am Main (D), 1998/99

[2] Bruno Brosowski, *Theorie abelscher Petri-Netze*, Vorlesungsausarbeitung, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt am Main (D), 1999

[3] Bruno Brosowski, *A Group-theoretical Approach to Petri Nets*, Ausarbeitung, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt am Main (D), 1999

[4] Bruno Brosowski, *Lineare Optimierung*, Vorlesungsskript, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt am Main (D), 1991

[5] Petra Tix, *Ein allgemeines Petri-Netz*, Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt/Main (D), April 1992

[6] Nicolas Schiller, *Stetige Petri-Netze*, Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt am Main (D), 1999

[7] René David, Hassane Alla, *Continuous Petri Nets*, Proceedings of the 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Zaragoza (E), June 1987, pp. 275-294

[8] René David, Hassane Alla, *Autonomous and Timed Continuous Petri Nets*, Proceedings of the 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Paris (F), June 1990, pp. 367-386

[9] René David, Hassane Alla, *Petri-Nets & Grafcet: Tools for Modelling Discrete Event Systems*, Prentice Hall Int., London (GB), 1992

[10] Hassane Alla, René David, *Continuous and Hybrid Petri Nets*, Journal of Circuits, Systems and Computers, Vol. 8, No. 1, April 1998