Waveletbasierte Rauschreduktion in medizinischen Ultraschalldaten

H. Mehldau, D. Zerfowski, A. Klappenecker

Universität Karlsruhe, IAKS, D-76128 Karlsruhe
Email: mehldau@ira.uka.de, zerfowsk@ira.uka.de, klappi@ira.uka.de

Zusammenfassung. Von Donoho und Johnstone wurde ein waveletbasiertes Verfahren zur Rauschreduktion entwickelt. Dieses Verfahren beruht auf der Annahme, daß signalunabhängiges Rauschen vorliegt. Medizinische Ultraschalldaten sind jedoch mit signalabhängigem Rauschen behaftet. In diesem Artikel werden zwei Ansätze vorgestellt, die das Vefahren von Donoho und Johnstone an das signalabhängige Rauschmodell anpassen.

Schlüsselwörter: Rauschminderumg, Wavelets, Ultraschall.

1 Einleitung

Ultraschallbilder weisen ein typisches, signalabhängiges Rauschen auf. In [1] wird dieses Rauschmodell durch

$$x = s + \sqrt{s}\,\eta, \tag{1}$$

angegeben. Hierbei bezeichnen x das verrauschte, s das unverrauschte Signal und $\eta \sim N(0, \sigma^2)$ einen unkorrelierten, weißen, Gaußschen Rauschprozess. Die meisten Rauschreduktionsverfahren setzen jedoch ein signalunabhängiges, additives Rauschmodell voraus. Insbesondere die waveletbasierten Verfahren, wie z.B. das Waveletreduktionsverfahren nach Donoho et al.[2] („Wavelet Shrinkage"), beruhen auf diesem einfachen Rauschmodell.

2 Orthonormale Wavelettransformation

Eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R})$ von der Form

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\Psi(2^{-j}x - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z},$$

wird Waveletbasis genannt. Wir nehmen stets an, daß das Wavelet Ψ kompakten Träger besitzt. Eine solche Waveletbasis läßt sich mit Hilfe einer Multiskalenanalyse konstruieren [3]. Insbesondere gibt es eine Folge von Approximationsräumen

$$\{0\} \subset \cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R}), \tag{2}$$

wobei der Teilraum V_j durch eine Orthonormalbasis $\Phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\Phi(2^{-j}x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, aufgespannt wird. Die Funktion Φ wird Skalierungsfunktion genannt.

Das orthogonale Komplement W_j eines „gröberen“Approximationsraumes V_j im nächst „feineren“ Approximationsraum V_{j-1} wird als Detailraum bezeichnet. Der Raum W_j wird durch die Wavelets $\Psi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, aufgespannt [4]. Hat man ein Signal f aus dem Approximationsraum V_J vorliegen, so läßt es sich zerlegen in

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{j_0,k} \Phi_{j_0,k} + \sum_{j=J+1}^{j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \Psi_{j,k}, \tag{3}$$

mit den Skalarprodukten $v_{j_0,k} := \langle \Phi_{j_0,k} \mid f \rangle$ und $w_{j,k} := \langle \Psi_{j,k} \mid f \rangle$.

Die Waveletkoeffizienten $w_{j,k}$ und die Approximationskoeffizienten $v_{j_0,k}$ lassen sich aus den Koeffizienten $v_{J,k}$ mit dem schnellen Algorithmus von Mallat [5] berechnen. Die Erweiterung der Wavelettransformation auf zwei (und mehr) Dimensionen gelingt durch die Bildung von Tensorprodukten [4].

3 Waveletreduktion

In der Wavelettransformation eines Signals sind im allgemeinen nur wenige Koeffizienten $w_{j,k}$ ungleich Null und tragen somit zum Signal bei. Betrachten wir ein additives Rauschmodell auf den Waveletkoeffizienten einer Skala J

$$\omega_{J,k} := w_{J,k} + \eta_{J,k}, \tag{4}$$

mit den $\eta_{J,k} \sim N(0, \sigma^2)$ unabhängig verteilt. Bei einer orthonormalen Waveletbasis ergibt sich für die nächst gröberen $(J + 1)$ (und alle weiteren) Skalen ebenfalls ein additives Rauschmodell. Die dabei auftretenden Rauschterme $\eta_{j,k}$ sind unabhängig und $N(0, \sigma^2)$ verteilt.

Das von Donoho und Johnstone in einer Reihe von Artikeln [2, 6, 7] vorgestellte Waveletreduktionsverfahren schätzt die Stärke des Rauschens auf den Waveletkoeffizienten. Um diesen additiven Rauschanteil von den Koeffizienten wieder zu entfernen, wird ein Schwellwert τ berechnet und dieser mit dem Schwellwertoperator

$$\delta_\tau(x) := \operatorname{sgn}(x)(x - \tau)_+ \quad \text{mit } (t)_+ := \begin{cases} t & t > 0, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \tag{5}$$

subtrahiert. Für die Berechnung des Schwellwertes τ gibt es eine Reihe von Ansätzen [6, 7, 8]. Hier wurde die in [6] vorgestellte hybride Methode aus den Schwellwertfunltionen VisuShrink und SUREShrink verwendet.

Durch die signalabhängige Varianz des Rauschens eignet sich das Waveletreduktionsverfahren nur bedingt für Ultraschalldaten.

4 Partitionierte Waveletreduktion

Dieses Verfahren beruht auf der Annahme, daß bei dem Rauschmodell (1) in Bereichen fast gleicher Signalamplitude ein nahezu signalunabhängiges Rauschmodell vorliegt. Zur Schätzung dieser Bereiche h_i wird der Approximationsraum verwendet. Die Schätzung der Rauschvarianz über diese Bereiche ist aber lokal sehr grob. Deshalb wird sie nur für die auf der gröbsten Skala liegenden Detailräume verwendet, da diese die gleiche lokale Auflösung besitzen. Danach wird rekonstruiert und das Verfahren erneut angewandt.

Wir betrachten den eindimensinalen Fall. Sei $s \in V_J$ das unverrauschte Signal mit kompaktem Träger. Das verrauschte Signal $x = s + \sqrt{s}\,\eta$, mit $\eta \sim N(0, \sigma^2)$, hat ebenfalls kompakten Träger. Die $\nu_{j_0,k}$ und $\omega_{j,k}$ seien die Approximations- bzw. Waveletkoeffizienten von x gemäß einer Waveletzerlegung (3) bis zu einem Approximationsraum V_{j_0}. Hiervon ausgehend wird folgender Algorithmus angewandt:

Eingabe: $(\nu_{j_0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, $(\omega_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ $j_0 > j > J$ (Waveletzerlegung von x)
Ausgabe: $\hat{\nu}_{J,k}$ (Approximationskoeffizienten von $\hat{x}$)
  $(\hat{\nu}_{j_0,k})_{k\in\mathbb{Z}} := (\nu_{j_0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ (Initialisierung).
  $j := j_0$.
  Solange $j > J$:
    $\hat{\nu}_{\max} := \max_{k\in\mathbb{Z}}(\hat{\nu}_{j,k})$; $\hat{\nu}_{\min} := \min_{k\in\mathbb{Z}}(\hat{\nu}_{j,k})$
    Partitioniere $[\hat{\nu}_{\min}; \hat{\nu}_{\max}]$ in r Intensitätsintervalle $(\lambda_{j,i})_{i=1}^{r}$.
    Teile die Indizes in Klassen $h_i := \{k \in \mathbb{Z} \mid \hat{\nu}_{j,k} \in \lambda_{j,i}\}$ ein.
    Für $i := 1 \ldots r$:
      Bestimme für die Waveletkoeffizienten $(\omega_{j,k})$ mit $k \in h_i$
       einen Schwellwert τ (wie beim Waveletreduktionsverfahren).
      $\hat{\omega}_{j,k} := \delta_\tau(\omega_{j,k})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
    Aus $(\hat{\nu}_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ und $(\hat{\omega}_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ rekonstruiere $(\hat{\nu}_{j-1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
    $j := j - 1$

Um eine Schätzung für Bereiche gleicher Signalamplitude zu erhalten, wird der Wertebereich der $(\hat{\nu}_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ in Intervalle partitioniert. Alle $(\hat{\nu}_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, die in einem Intervall λ_i liegen, werden über die Indexmenge h_i zusammengefaßt. Für die zugehörigen Waveletkoeffizienten $(\omega_{j,k})_{k\in h_i}$ der untersten Skala wird dann wie beim Waveletreduktionsverfahren die Varianz des Rauschens geschätzt, ein Schwellwert berechnet und der entsprechende Schwellwertoperator auf die Koeffizienten angewandt. Die unterste Skala wird rekonstruiert und das Verfahren für die nächste Skala mit dem neuen, rauschgeminderten Approximationsraum fortgesetzt.

Die Partitionierung des Wertebereichs durch Intervalle muß nicht notwendigerweise äquidistant sein. Nichtlineare Partitionierungen mit quadratisch oder exponentiell wachsender Intervallänge haben sich als vorteilhaft erwiesen. Desweiteren hat sich gezeigt, daß ein kleine Anzahl an Intervallen ($r < 15$) völlig ausreichend ist.

5 Homomorphe Waveletreduktion

Ein verbreitetes Verfahren zur Reduktion von signalabhängigem Rauschen, insbesondere von multiplikativem Rauschen, ist die homomorphe Filterung [9]. Dabei wird die Rauschminderung nach einer Transformation vom signalabhängigen in ein signalunabhängiges Rauschmodell durchgeführt. Anschließend wird eine Rücktransformation in das ursprüngliche Rauschmodell vorgenommen.

Für das allgemeine signalabhängige Rauschmodell

$$x = t(s) + r(s)\,\eta, \quad \eta \sim N(0, \sigma^2) \tag{6}$$

ist also eine Funktion g von der Form $g(x) = u(s) + N(\eta)$ für zwei Funktionen u, N gesucht, um eine additive Verknüpfung von Signal und Rauschen zu erhalten. Hierzu betrachtet man die Taylor-Entwicklung von g um $t(s)$. Für das multiplikative Rauschmodell konvergiert diese Entwicklung gegen $g(x) = \ln(x)$. In anderen Fällen kann nur eine Näherung vorgenommen werden, indem die Terme ab dem zweiten Glied vernachlässigt werden. Für das vorliegende Rauschmodell (Gleichung 1) ergibt sich

$$g(x) = g(s + \sqrt{s}\,\eta) \approx g(s) + g'(s)\sqrt{s}\,\eta. \tag{7}$$

Um hieraus ein signalunabhängiges Rauschmodell zu erhalten, muß gelten, daß $g'(s)\sqrt{s} = 1$ ist. Also ist $g(x) = 2\sqrt{x}$. Desweiteren ist die Rücktransformation f zu berechnen. Für sie soll $f(g(s)) = s$ gelten, damit ist $f(x) = x^2/4$.

Beim homomorphen Waveletreduktionsverfahren wird das verrauschte Signal x punktweise mit g transformiert, und auf den transformierten Daten das Waveletreduktionsverfahren durchgeführt. Die so erhaltenen, rauschgeminderten Daten werden durch f zurücktransformiert.

6 Erste Ergebnisse

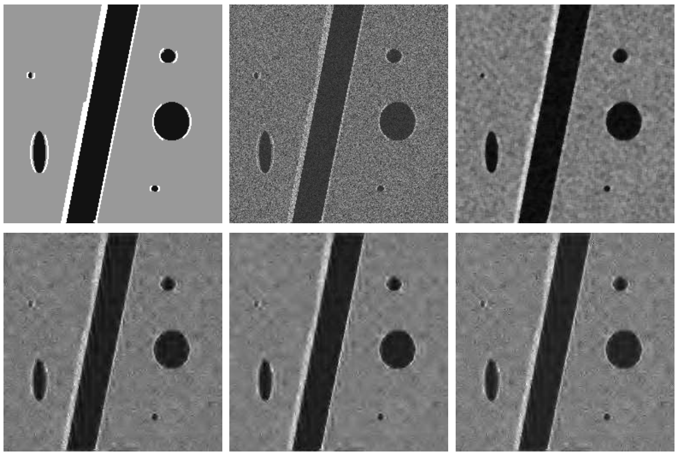
Beide Verfahren wurden in das am IAKS entwickelte Bildverarbeitungssystem TomAS [10] integriert. Die Tests wurden auf einem Referenzbild (Abb. 1) durchgeführt, das nachträglich gemäß (1) mit verschiedenen Rauschstärken verrauscht wurde. Zum Vergleich wurden ein 5×5 Medianfilter als Standardverfahren für signalabhängiges Rauschen und das oben beschriebene Waveletreduktionsverfahren herangezogen. Alle waveletbasierten Verfahren benutzen die D6-Waveletbasis [4]. Das partitionierte Waveletreduktionsverfahren verwendet eine exponentielle Partitionierung und $r = 11$ Intervalle. Gemessen wurde der Signal-Rauschabstand (PSNR) (s. Tabelle 1).

Alle waveletbasierten Verfahren erreichen bessere Werte als der Medianfilter, wobei das partitionierende Verfahren konsistent die besten Werte erzielt.

PSNR	verrauscht	Median	Wavlt.red.	Part. WR	Hom. WR
$\sigma = 2$	20,1767	25,0815	27,0483	27,3058	26,9185
$\sigma = 5$	12,2179	21,3248	21,9540	22,6113	21,5863
$\sigma = 10$	6,1973	16,8339	18,1395	19,2719	17,4770

Tabelle 1. PSNR-Messung anhand eines Referenzbildes. Ergebnisse verschiedener Rauschreduktionsverfahren, Alle Angaben in dB.

Abb. 1. Beispiele für Rauschreduktionsverfahren (von links nach rechts): Referenzbild, verrauschtes Bild ($\sigma = 5$), Median, Waveletreduktion, partitionierte Waveletreduktion, homomorphe Waveletreduktion



Danksagung. Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung durch den Sonderforschungsbereich SFB 414 „Informationstechnik in der Medizin – Rechner und sensorgestützte Chirurgie" (Teilprojekt Q1).

Literatur

1. T. Loupas, W. N. McDicken, and P. L. Allan. An adaptive weighted median filter for speckle suppression in medical ultrasonic images. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 36(1):129–135, Januar 1989.
2. D. L. Donoho et al. Wavelet shrinkage: Asymptopia? *J. Roy. Stat. Soc.*, 57:301–369, 1995.
3. G. Gripenberg. A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet. *Studia Math.*, 114(3):207–226, 1995.
4. A. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets - Theorie und Anwendugen.* Teubner, 1994.
5. S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 11(7):674–693, Juli 1989.
6. D. L. Donoho and I. M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the Am. Stat. Association*, 90:1200–1224, 1995.
7. D. L. Donoho and I. M. Johnstone. Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455, 1994.
8. M. Hilton and T. Ogden. Data analytic threshold selection in 2D signal de-noising. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(2):496–500, 1997.
9. I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos. *Nonlinear Digital Filters.* Kluwer Academic Publishers, 1991.
10. D. Zerfowski, T. Rohlfing, U. Mende, and Th. Beth. TomAS – Tomographic Algorithms and Ultrasound Simulation. In Lemke (Hrsg.), *CAR'97*, Seite 1017. Elsevier Science, 1997.